

## I. Introdução.

O objetivo da primeira parte dos experimentos é modelar o motor CC . Para isso realizamos ensaios para obter os parâmetros deste motor. Como existem diversos métodos para modelá-lo comparamos o resultado de cada ensaio com o intuito de verificar qual procedimento se aproxima do modelo real.

Realizamos os ensaios utilizando os métodos clássico, **Pasek** e por interpolação.

Para comparar também obtivemos a curva real do motor para uma entrada de 12.37 Volts proveniente de uma bateria CC.

### Parâmetros e modelo do Motor de Corrente contínua.

O motor de corrente contínua ou motor CC pode ser modelado como mostra o esquema abaixo.

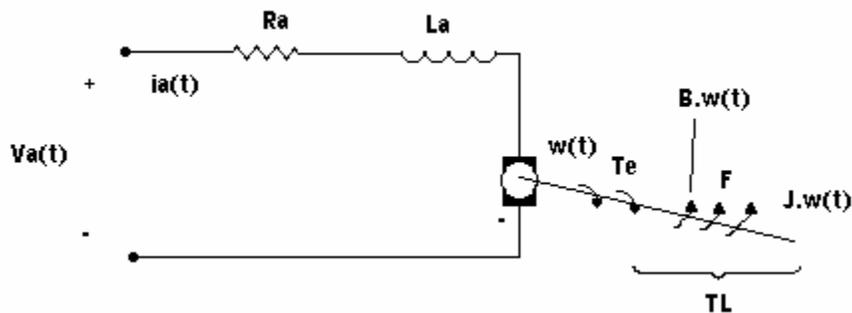


Figura 1. Diagrama eletromecânico do Motor CC (ou DC).

Equacionando a partir do modelo acima as seguintes equações podem ser obtidas :

$$V_a(t) = R_a \cdot i_a(t) + L_a \cdot \frac{d(i_a(t))}{dt} + K_e \cdot w(t) \quad (1)$$

$$T_e = K_t i_a(t) \quad (2)$$

$$T_L = J \frac{d(\omega(t))}{dt} + B \omega(t) + F \quad (3)$$

Onde:

Parâmetros elétricos:

Ra (resistência de armadura), La (indutância de armadura), Ke (constante de f.e.c.m).

Parâmetros mecânicos:

J (momento de inércia), B (coeficiente de atrito viscoso), F (coeficiente de estático)

e Kt (constante de torque).

## **II .Obtenção experimental dos parâmetros do Motor CC Eletrocaf número 3.**

### **1. Obtenção dos parâmetros através do método clássico.**

#### **1.1 Determinação da resistência de armadura Ra.**

##### **1.1.1 Método do Ohmímetro.**

Ligamos um ohmímetro aos terminais da armadura do motor e medimos o valor para várias posições do eixo do motor. O menor valor encontrado será o valor requerido.

Os valores encontrados foram Ra1= 1.8 Ω, Ra2= 3.7 Ω e Ra3 = 1.57 Ω.

Como devemos adotar o menor valor encontrado utilizamos Ra= 1.57 Ω.

### 1.1.2 Método da característica v x i

Para duas posições do motor obtemos a característica v x i do motor CC. Através de (1) observamos que se a corrente for contínua e não houver movimento do eixo podemos utilizar esta equação para obtermos a curva desejada. Ra é a inclinação desta curva.

### 1.2 Determinação da indutância de armadura La.

Se não houver movimento no eixo do motor a equação (1) se torna :

$$V_a(t) = R_a i_a(t) + L_a \frac{d(i_a(t))}{dt} \quad (4)$$

A equação (4) tem uma resposta ao degrau no domínio do tempo igual a :

$$i_a(t) = (V_a/R_a)(1 - e^{-t/\tau_a}) \quad (5)$$

onde  $\tau_a = L_a/R_a$ . Fazendo  $t = \tau_a$  em (5) obtemos  $i_a(\tau_a) = (V_a/R_a) \cdot 0.632$ . Basta então medir o tempo que a corrente leva para atingir 63.2 % do valor de regime  $V_a/R_a$ . Daí podemos obter  $\tau_a$  e assim  $L_a$ . Para isso aplicamos um degrau na alimentação do motor colocando o sinal  $i_a(t)$  no osciloscópio de memória podemos verificar o gráfico da resposta transitória e assim determinar o valor de  $\tau_a$ . Para isso adicionamos um resistor  $R \ll 1$  colocado em série com o motor. Neste caso escolhemos  $R = 0.25 \Omega$

Encontramos o valor  $\tau_a$  igual a 1.2 ms . Daí para encontrar o valor de  $L_a$  basta utilizar o fato de que  $L_a = R_a \tau_a$  . Assim:

$$L_a = 1.2 \times 10^{-3} \times 1.509 = 1.805 \text{ mH.}$$

### 1.3 Determinação da constante de força eletromotriz $K_e$ .

Para obtermos  $K_e$  precisamos zerar a parcela  $d(i_a(t))/dt$  de (1). Para isso alimentamos o motor com uma tensão  $V_a$  constante. A velocidade de rotação do motor deve ser constante para podermos encontrar  $K_e$ . Com estas condições obedecidas ficamos com uma fórmula para obter  $K_e$  (que é obtida à partir de (1)) :

$$K_e = (V_a - R_a \cdot i_a) / \omega \quad (6)$$

O motor Eletrocaf possui um tacômetro que gera uma tensão proporcional a velocidade de rotação do motor. Assim podemos obter diversos valores de  $K_e$  e em seguida achamos o valor médio encontrado. Com o mesmo circuito do item anterior podemos medir diversos valores de  $i_a$  e  $\omega$  e em seguida elaborar a tabela 1.

É preciso lembrar que a saída do tacômetro é uma tensão contínuo dada em volts. Assim é necessário converter esta tensão em radianos por segundo . Isto é feito segundo a seguinte relação :  $\omega = 6.61 V_{tg}$  onde  $V_{tg}$  é a tensão que é extraída do tacômetro.

Desta forma podemos obter a tabela 1.

*Tabela 1- Valores Experimentais para cálculo de Ke, Tr, B e F.*

Va (V)	Ia (A)	Vtg (V)	W (rad/s)	Ke (V.s/rad)	Tr (N.m)
4	0,058	5,54	36,9518	0,07836	0,00492
5	0,06	7,4	49,358	0,07885	0,00509
6	0,063	9,15	61,0305	0,08007	0,00535
7	0,065	11	73,37	0,08018	0,00552
8	0,067	12,95	86,3765	0,07964	0,00569
9	0,068	14,35	95,7145	0,0823	0,00577
10	0,07	15,8	105,386	0,0842	0,00594
11	0,073	17,8	118,726	0,08312	0,0062
12	0,074	19,4	129,398	0,08398	0,00628
13	0,075	21,25	141,7375	0,08371	0,00637
14	0,078	23,1	154,077	0,08346	0,00662
14	0,076	23,15	154,4105	0,08978	0,00645
15	0,08	25,2	168,084	0,08838	0,00679
16	0,082	27	180,09	0,08802	0,00696
16	0,081	27,01	180,1567	0,09355	0,00687
17	0,083	28,4	189,428	0,09423	0,00704
18	0,086	30,6	204,102	0,09233	0,0073
18	0,085	30,3	202,101	0,0982	0,00721
19	0,087	31,93	212,9731	0,09787	0,00738
20	0,089	34,04	227,0468	0,09619	0,00755

O valor médio de Ke na tabela acima é :

**Ke = 0.08487 V.s/rad**

#### 1.4 Determinação do coeficiente de atrito viscoso B e do coeficiente de atrito estático F.

Na condição de regime permanente a equação mecânica do motor CC é dada por :

$$B\omega + F = K_t \cdot I_a = T_e = T_r . \quad (7)$$

$T_r$  é denominado torque resistivo.

Conforme mostrado em [Man 99] na página 15  $T_r$  pode ser expressado como uma função de  $I_a$  e  $K_e$ . Como já temos valores experimentais obtidos anteriormente de  $I_a$  e  $K_e$ , podemos desenhar o gráfico de  $T_r$  em função da velocidade angular  $\omega$ . Os valores de  $T_r$  são mostrados na tabela 1.

$$T_r = K_e \cdot I_a \quad (8)$$

Mas como  $T_r = B\omega + F$  basta que façamos uma regressão linear para encontrar os valores de B e F. O gráfico 2 mostra  $T_r$  em função de  $\omega$ .

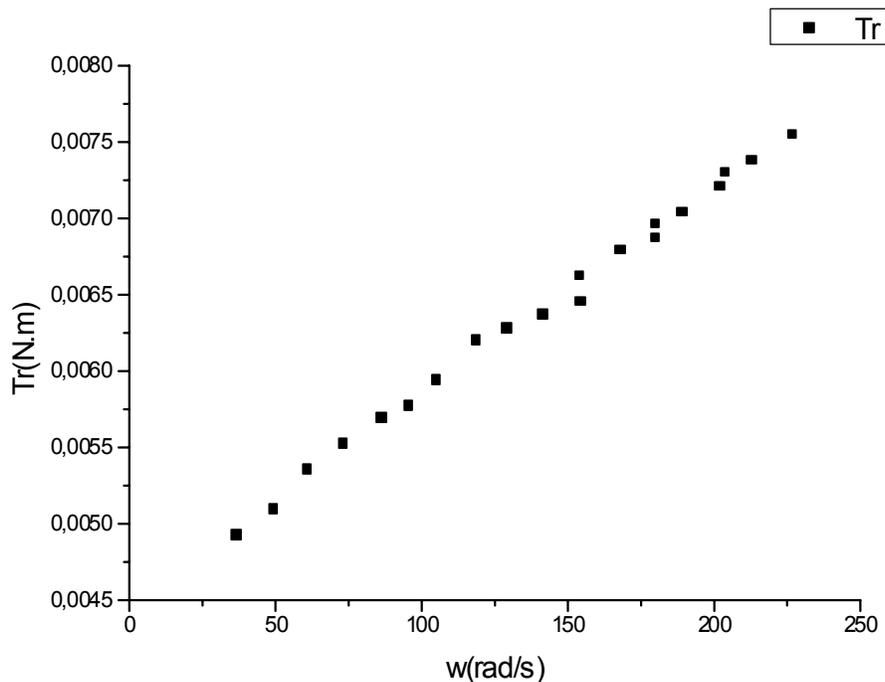


Figura 2- Torque resistivo em função da velocidade angular.

O valor da regressão linear obtida do gráfico acima resulta em :

$$F= 0.00448 \text{ N.m}$$

$$B= 0.00001 \text{ N.m.s/rad}$$

### 1.5 Determinação do momento de inércia J do Motor CC.

Pode-se encontrar o momento de inércia J do motor através do ensaio de transitório mecânico. A equação mecânica do motor é uma equação diferencial de 1.a ordem. Em primeiro lugar faz-se o motor funcionar a uma velocidade  $w_0$  e após ele entrar em regime desliga-se o motor. Conforme mostra a figura 3 abaixo, basta que encontremos o intervalo de tempo  $\tau_b$  para encontrarmos J, já que este está relacionado a B segundo a seguinte relação  $\tau_b = J/B$ .

Para obtermos um gráfico como o da figura abaixo ligamos a saída do tacômetro ao osciloscópio. Quando desligamos o motor a uma queda exponencial requerida.

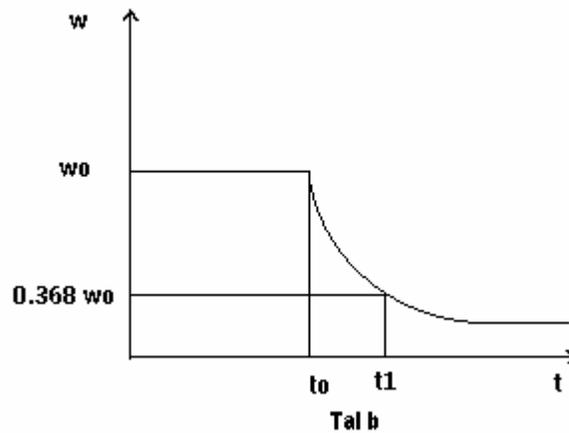


Figura 3 Determinação da constante de tempo mecânica.

Como  $\tau_b = t_1 - t_0$ , podemos à partir da figura gerada no osciloscópio encontrar o momento de inércia. Encontramos o valor para J igual a :

$$J = 6.8 \times 10^{-6} \text{ N.m.s}^2/\text{rad}$$

Há ainda o parâmetro  $K_t$ , a constante de torque. Porém como mostrado em [Man 99] esta é numericamente igual a  $K_e$  se as unidades forem expressas no sistema MKS.

## 2. Obtenção dos parâmetros do motor CC através do método Pasek.

O método **Pasek** descrito em [Man 99] nas páginas 27 a 30, permite que através de uma curva obtida no osciloscópio possamos utilizar algumas características desta para calcular os parâmetros do motor CC utilizando um *software* que faz os cálculos necessários para e encontrar os dados requeridos.

Após obter estes parâmetros podemos utilizar um dos modelos do motor CC para obter sua função de transferência.

Considere a figura abaixo:

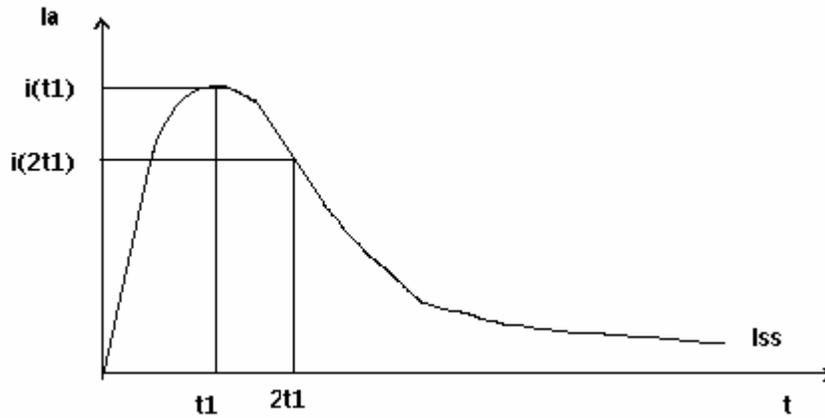


Figura 4- Resposta transitória típica da corrente de armadura e velocidade para o modelo de Segunda ordem.

Precisamos encontrar a curva acima. Para isso fazemos a seguinte montagem.

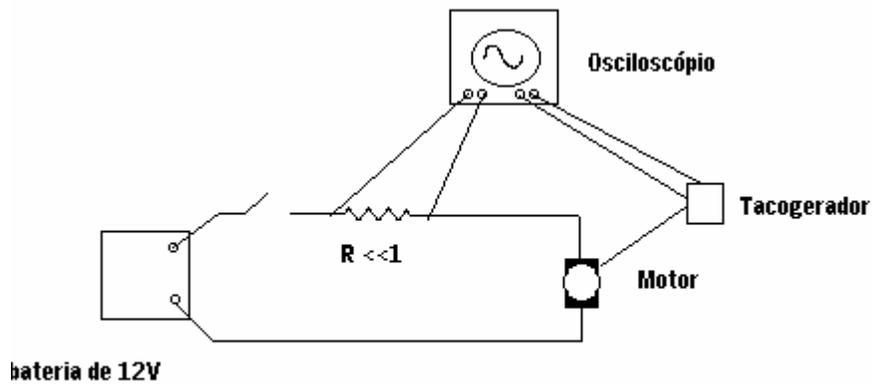


Figura 5 Circuito para ensaio **Pasek** e Interpolação.

Com a montagem acima, alimentamos o motor com um degrau de tensão de 12 Volts (na verdade o degrau era de 12.37 Volts) e obtemos no osciloscópio de memória um gráfico

semelhante a figura 4. A partir desta figura extraímos os valores de  $t_1$ ,  $i(t_1)$ ,  $i(2t_1)$ . Podemos obter o valor de  $I_{ss}$  (corrente de regime) à partir do gráfico ou através do multímetro. O valor de  $w_{ss}$  ou seja, a velocidade do motor após este entrar em regime é obtida através do tacômetro, ligado ao voltímetro.

Na figura 5 é apresentado também o esquema para obtermos a curva real da resposta do motor. Isto é, sua resposta a um de grau de tensão, uma alimentação contínua de tensão. Este esquema também será utilizado para obtermos os parâmetros do motor através do método de interpolação.

Realizamos 3 ensaios. Ou seja repetimos o procedimento acima 3 vezes obtendo os seguintes resultados:

- i) Primeiro ensaio:  $V_a = 12.37 \text{ V}$ ,  $t_1 = 5.2 \text{ ms}$ ,  $i(t_1) = 5.32 \text{ A}$ ,  $i(2t_1) = 4.2 \text{ A}$ .  $I_{ss} = 0.3 \text{ A}$ .  $w_{ss} = 133 \text{ rad/s}$ .
- ii) Segundo ensaio:  $V_a = 12.37 \text{ V}$ .  $t_1 = 5.2 \text{ ms}$ ,  $i(t_1) = 5.272 \text{ A}$ ,  $i(2t_1) = 4.192 \text{ A}$ .  $I_{ss} = 0.305 \text{ A}$  e  $w_{ss} = 134.73 \text{ rad/s}$
- iii) Terceiro ensaio:  $V_a = 12.37 \text{ V}$ ,  $t_1 = 5.1 \text{ ms}$ ,  $i(t_1) = 4.96 \text{ A}$ ,  $i(2t_1) = 4.08 \text{ A}$ ,  $I_{ss} = 0.3 \text{ A}$  e  $w_{ss} = 134.06 \text{ rad/s}$ .

Em seguida utilizamos o programa **Param** para encontrar os parâmetros necessários. O programa param ainda pede um outro dado a corrente  $I_{tdz}$  que é considerada zero neste experimento. Escolhemos os modelos de 4-8 no programa param.

Assim obtemos a tabela a seguir:

Tabela 2- Parâmetros do Motor CC provenientes do Método Pasek.

Parâmetro	1.o	2.o	3.o	Média
$\tau_a$	0.00225	0.002214	0.001999	0.00215
$\tau_b$	0.2988	0.299	0.3215	0.30643
$\tau_m$	0.01392	0.01445	0.01713	0.01517
Ra ( $\Omega$ )	1.836	1.866	2.051	1.91767
La (H)	0.004134	0.004132	0.004101	0.00412
Ke (Vs/rad)	0.08887	0.08758	0.0876	0.08802
Kt (N.m/A)	0.08887	0.08758	0.0876	0.08802
J(N.m.s <sup>2</sup> /rad)	0.0000599	0.00005939	0.00006407	0.00006
B (N.m.s/rad)	0.00020005	0.0001987	0.0001993	0.0002
F	0	0	0	0

### 3. Obtenção dos parâmetros utilizando o método de interpolação de curvas.

Na figura 5 podemos observar que a saída do tacômetro pode ser ligada ao osciloscópio de modo a obtermos o funcionamento real do motor. Para isso basta que liguemos a saída do tacômetro no osciloscópio e assim a curva encontrada é a curva real do motor CC. Então aplicamos um degrau de 12 Volts na alimentação do motor CC e obtemos no osciloscópio a curva desejada. No próprio osciloscópio, medimos pares (t, Vtg) para podermos ter uma lista de pares t e Vtg ( que é multiplicado por 6.67 para obtermos o valor da velocidade angular em rad/s) e assim interpolar o gráfico da resposta real do motor CC. No programa **Param** há uma opção que nos fornece a função de transferência do motor CC desde que forneçamos os pares t e w obtidos. Devemos atentar que neste método a função de transferência do motor não é expressa em função dos parâmetros elétricos ou mecânicos e sim na forma :

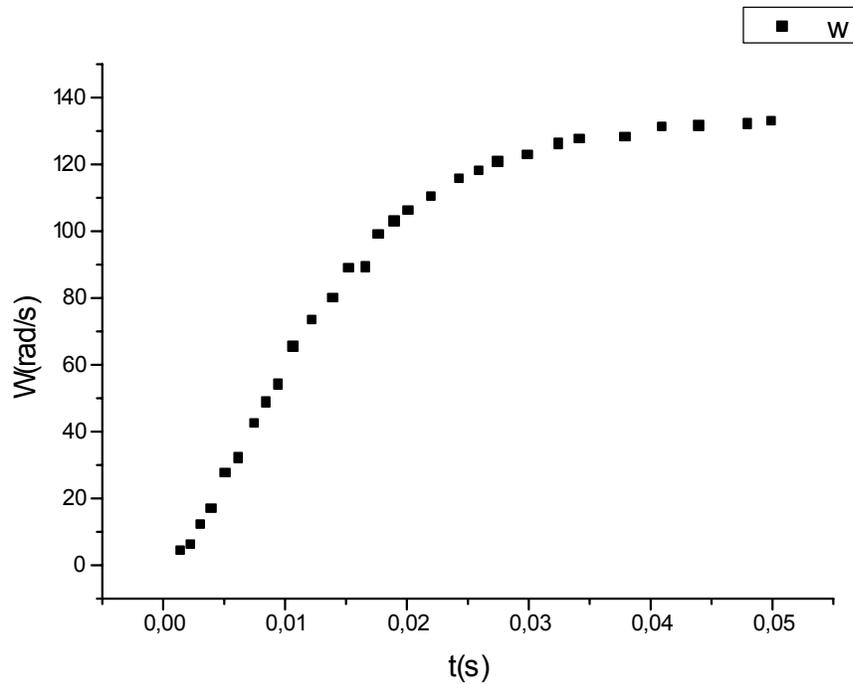
$$G(s) = Km/ (s+ \delta) (s+ \gamma) \quad (9)$$

Procedendo como descrito acima podemos elaborar a seguinte tabela de valores experimentais à partir dos dados que coletamos.

*Tabela 3- Valores de  $w$  e  $t$  para obtermos a resposta real do motor CC.*

t (segundos)	w (rad/s)
0,0015	4,335
0,0023	6,003
0,0031	12,006
0,004	16,675
0,0052	27,34
0,0062	32,016
0,0075	42,35
0,0085	48,691
0,0095	54,025
0,0107	65,36
0,0123	73,37
0,014	80,04
0,0153	88,71
0,0167	89,04
0,0177	99,04
0,019	102,71
0,0202	106,05
0,022	110,055
0,0243	115,39
0,026	118,05
0,0275	120,72
0,03	122,72
0,0325	126,06
0,0342	127,39
0,038	128,06
0,041	131,06
0,044	131,39
0,048	132
0,05	132,73

Podemos também mostrar os dados acima num gráfico como mostrado abaixo :



*Figura 6- Resposta real do motor CC.*

O programa **Param** fornece como saída da interpolação os parâmetros  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $\gamma$ .  
Estes são então :

$$\gamma = 116.2682$$

$$\delta = 171.6254$$

$$k_m = 2.2183 \times 10^5$$

### 3. Comparação dos parâmetros obtidos pelo método Pasek e clássico.

Podemos apresentar numa tabela os resultados dos parâmetros encontrados na aplicação do método clássico e pelo método Pasek.

Tabela 4- Comparação entre os métodos de obtenção dos parâmetros.

Parâmetro	Pasek	Método Clássico
$\tau_a$	0.00215	-
$\tau_b$	0.30643	-
$\tau_m$	0.01517	-
Ra ( $\Omega$ )	1.91767	1.57
La (H)	0.00412	0.001805
Ke (Vs/rad)	0.08802	0.08487
Kt (N.m/A)	0.08802	0.08487
J(N.m.s <sup>2</sup> /rad)	0.00006	6.8E-6
B (N.m.s/rad)	0.0002	0.00448
F	0	0.00001

### III. Apresentação, comparação e simulação das funções de transferência encontradas à partir dos parâmetros do motor CC.

#### 1. Introdução.

Neste item nosso objetivo é primeiro encontrar as funções transferência do motor CC à partir dos parâmetros encontrados experimentalmente nos três métodos. Em seguida vamos passar todas as 3 funções de transferência para a forma (9) para efetuarmos comparações entre  $k_m$ ,  $\delta$  e  $\gamma$  de cada método. Finalmente vamos simular cada função de transferência com auxílio do **Matlab** e comparar os resultados das respostas a um degrau para cada tipo de ensaio com a resposta real.

#### 2. Função de transferência obtida à partir do método clássico.

Em [Man 99] na página 26 temos a função de transferência para modelo 8. Esta função de transferência relaciona a entrada do motor, uma tensão com uma saída  $w(s)$ . Ou seja:

$$G(s) = W(s)/V(s)$$

Isto é feito pois o objetivo é controlar a velocidade de rotação do motor, W através da tensão aplicada em seus terminais, V.

Aplicando os dados obtidos (ver item I.1) na equação abaixo podemos obter a função de transferência desejada.

A forma da função de transferência é :

$$G(s) = (1/K_e \cdot \tau_e \tau_m) / (s^2 + (1/\tau_a + 1/\tau_b)s + (1/(\tau_m \tau_a) + 1/(\tau_a \cdot \tau_b))) \quad (10)$$

Onde:

$$\tau_a = L_a/R_a \quad (11)$$

$$\tau_b = J/B \quad (12)$$

$$\tau_m = R_a \cdot J / K_e \cdot K_t \quad (13)$$

Com (10), (11), (12) e (13) encontramos a seguinte função de transferência :

$$G(s) = 6106621 / s^2 + 883s + 520031 \quad (*)$$

## 2. Função de transferência à partir do método Pasek.

Utilizando as equações de (10) até (13) e os dados obtidos no item II.2 podemos encontrar a seguinte função de transferência :

$$G(s) = 358953 / (s^2 + 447.4 s + 33386) \quad (**)$$

## 3. Função de transferência do método de interpolação de curvas.

O programa **Param** já nos fornece a F.T quase que diretamente. Basta que substituamos os valores de km,  $\delta$  e  $\gamma$  em (9) para encontrar a função desejada. Ou seja:

$$G(s) = 2.21183 \times 10^5 / ((s + 116.2682)(s + 171.6254))$$

Expandindo o denominador ficamos com :

$$G(s) = 2.21183 \times 10^5 / s^2 + 287.8936s + 19954.576 \quad (***)$$

#### 4. Comparação das funções de transferência.

Vamos passar (\*), (\*\*), e (\*\*\*) para a forma (9) para comparar os valores de  $\zeta$ ,  $\delta$  e  $\gamma$ .

Passando (\*) para a forma (9) obteremos :

$$G(s) = 6106621 / (s + 441.5 - j570)(s + 441.5 + j570)$$

Passando (\*\*) para a forma (9) obteremos:

$$G(s) = 358953 / (s + 91.6431)(s + 352.7569)$$

Passando (\*\*\*) para a forma (9) obteremos:

$$G(s) = 2.218 \times 10^5 / (s + 116.2682)(s + 171.6254)$$

Ou seja :

Tabela 5: Comparação entre Km,  $\delta$  e  $\gamma$  dos diversos métodos.

Método	Km	$\delta$	$\gamma$
Clássico	-	-	-
Interpolação	$2.218 \times 10^5$	171.6254	116.2682
Pasek	358953	91.6431	352.7569

### 5. Simulações :

Nosso objetivo é modelar o motor CC através de seus parâmetros mecânicos e elétricos. Por isso obtivemos as funções de transferência (\*), (\*\*), (\*\*\*) . Agora é preciso simular o funcionamento do motor em malha aberta através do **Matlab**.

Aplicaremos um degrau de 12 volts na entrada de alimentação do motor e vamos comparar as repostas ao funcionamento real do motor.

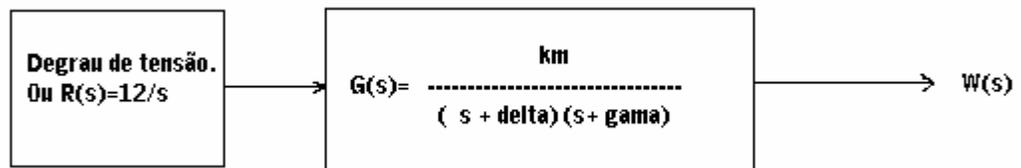
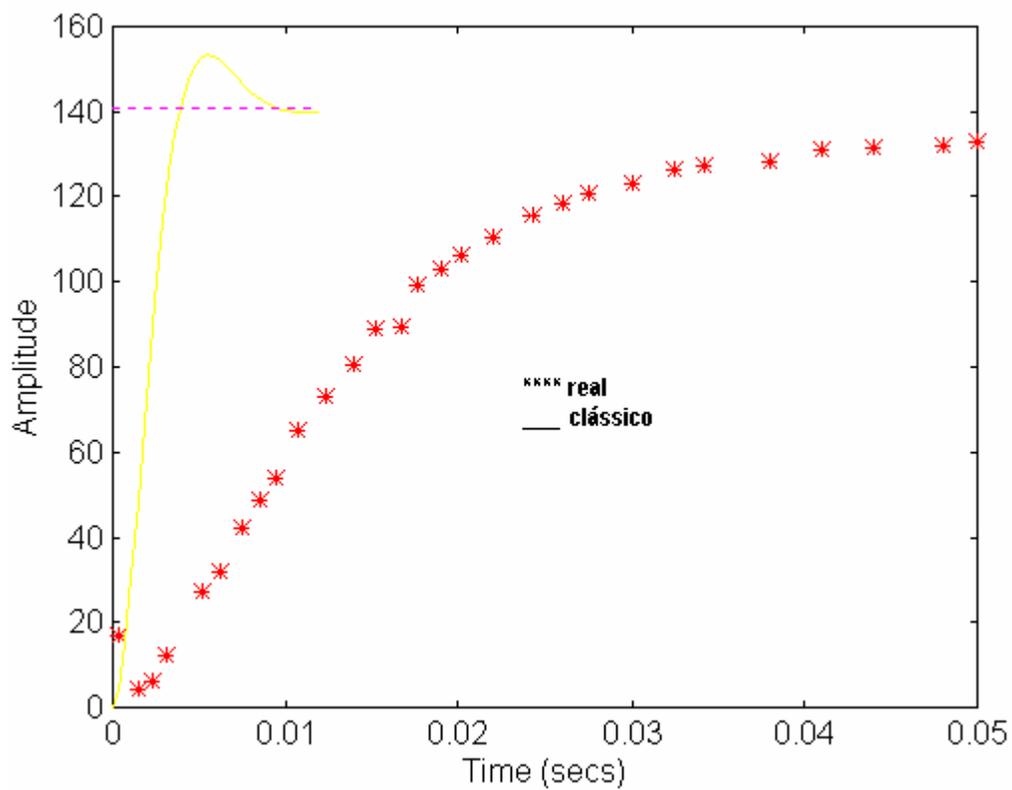


Figura 7- Diagrama em blocos do sistema de malha aberta

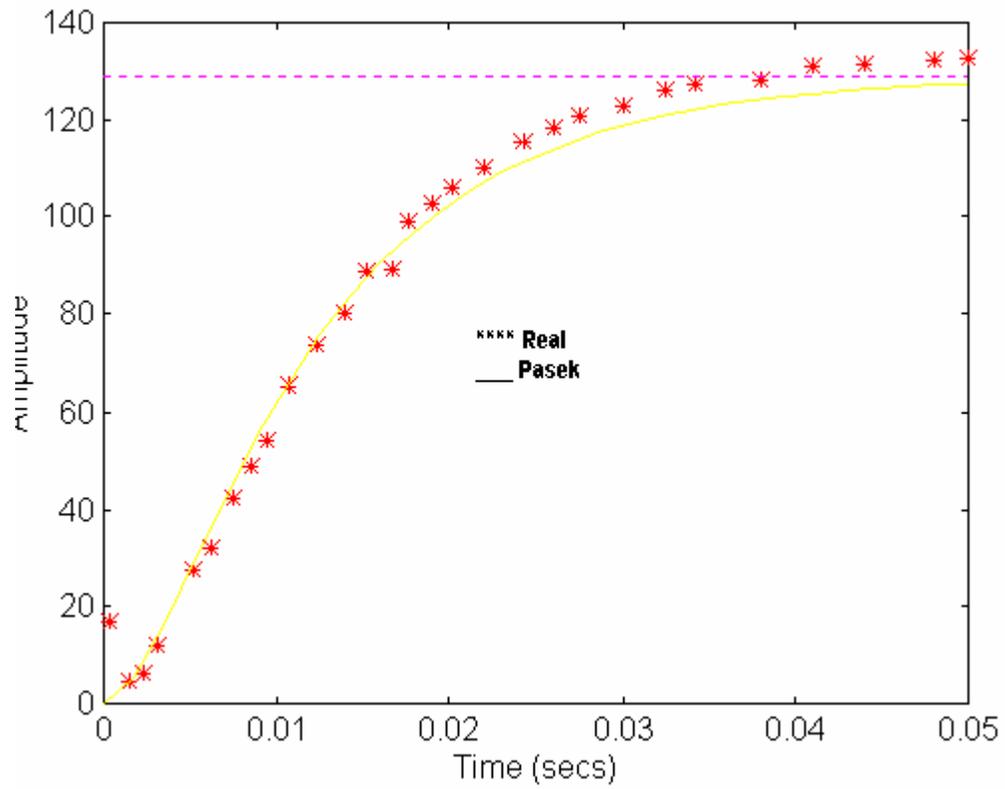
Aplicando um sinal de tensão , um degrau na entrada do motor, este resulta numa resposta que obedece as equações diferenciais que modelam o motor CC.

Em primeiro lugar mostramos a resposta a um degrau de 12 volts para o modelo clássico juntamente com a resposta real.



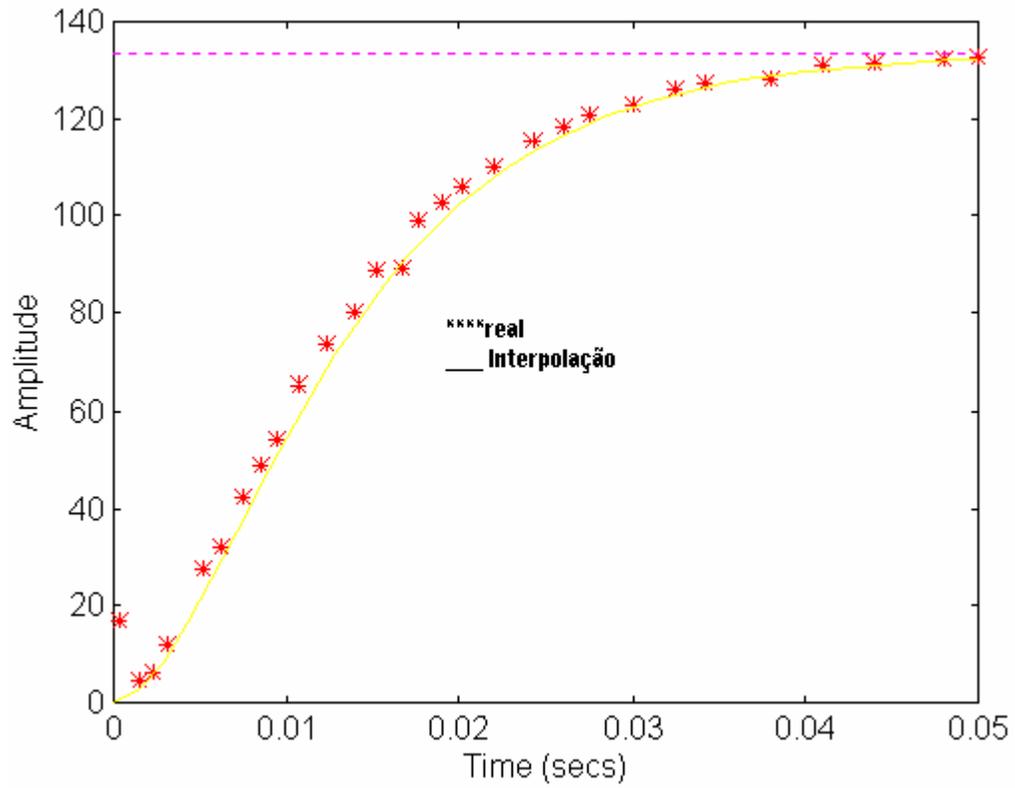
*Figura 8- resposta ao degrau de 12 volts do modelo clássico juntamente com a resposta real.*

A resposta da F.T gerada à partir do método **Pasek** é :



*Figura 9 - Resposta ao Degrau do método Pasek e resposta real*

Já a resposta ao degrau de 12 volts para a F.T proveniente do método de interpolação resulta na figura abaixo.



*Figura 11 Resposta ao degrau para F.T gerada pelo método de interpolação.*

Agora mostramos todos as repostas num mesmo gráfico :

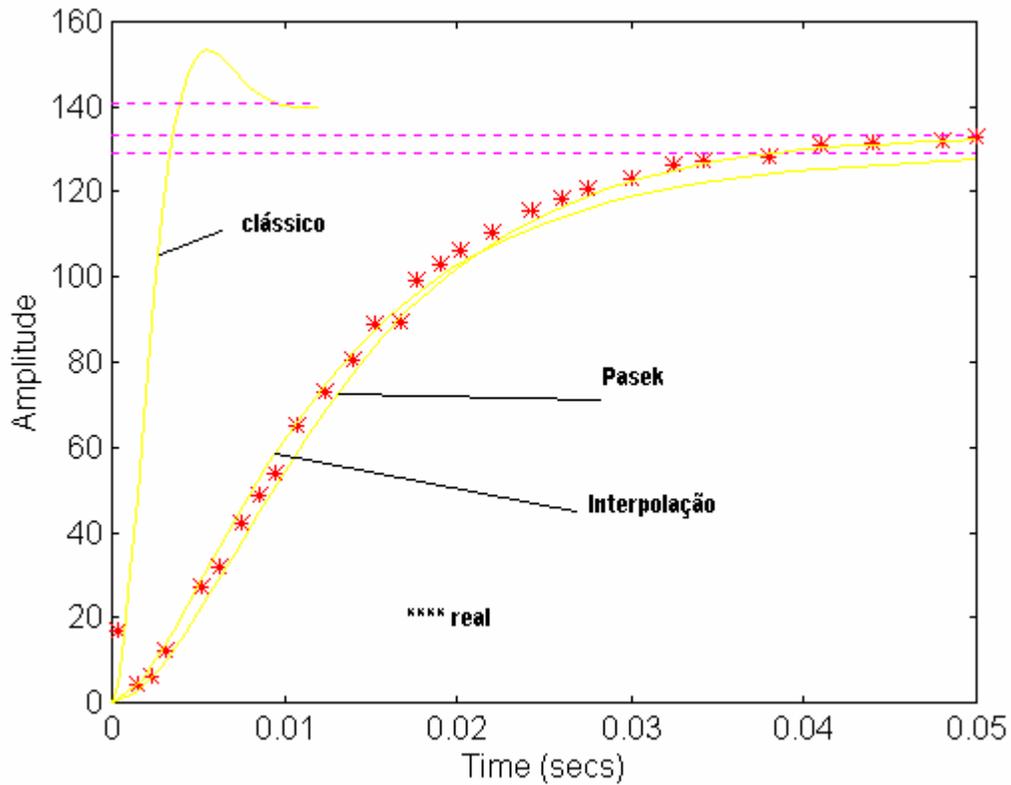


Figura 12- As respostas ao degrau de 12 volts para os diversos modelos e a resposta real.

#### IV. Apresentação do modelo do motor CC.

Com os valores obtidos à partir do método Pasek podemos elaborar o seguinte diagrama em blocos do sistema.

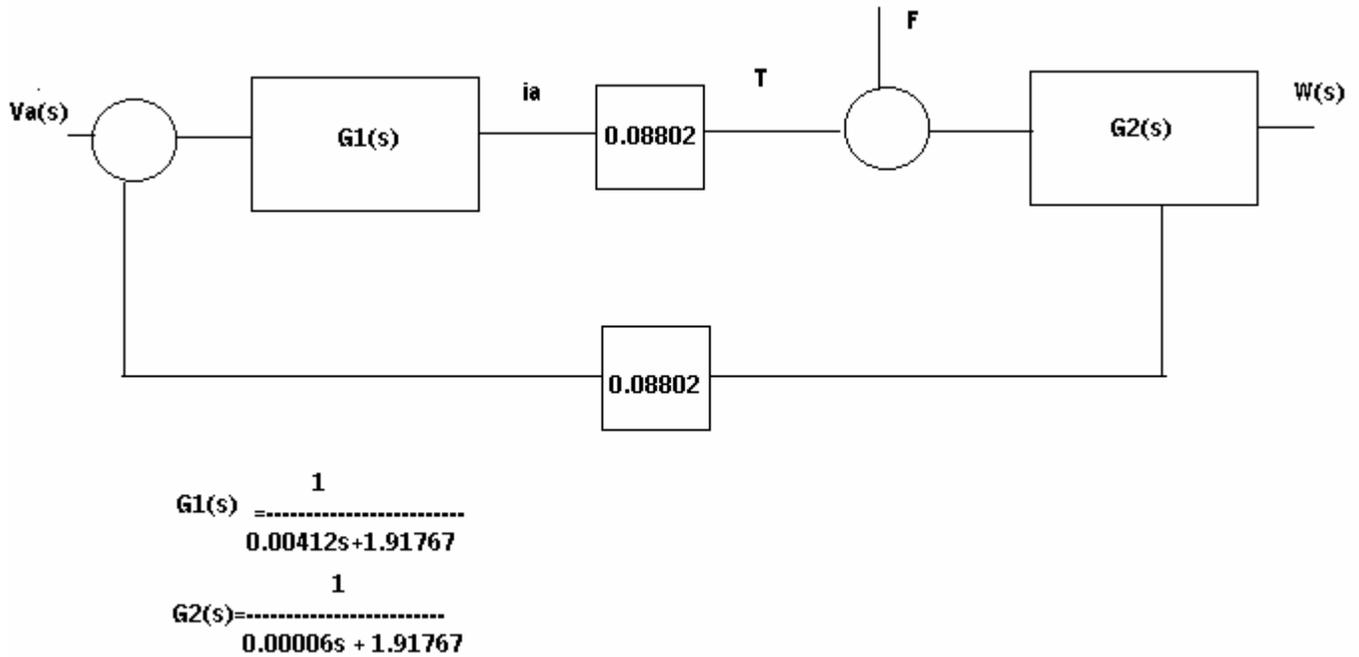


Figura 13- Diagrama em blocos do motor CC.

O diagrama acima representa o modelo 8 do motor CC com os parâmetros obtidos anteriormente com o método **Pasek**.

Desta forma aplicando um sinal  $V_a$  na entrada obtemos uma corrente de armadura  $i_a$ . Esta gera um torque  $T$  que faz o motor girar com velocidade angular  $W$ . A função de transferência portanto é a da velocidade angular em relação a tensão de alimentação.

## V. Conclusões.

Os métodos de modelamento nos proporcionaram 3 funções de transferência. O método clássico, o método Pasek e o método de interpolação.

O método clássico apresenta resultados bastante diferentes dos dois outros métodos, talvez por utilizar métodos menos precisos de medição dos parâmetros. Sua resposta a um degrau de 12 volts gera uma resposta incongruente com o modelo real. Além disso este modelo gera uma função de transferência que possui dois pólos complexos. Portanto devemos considerar esta função de transferência com caráter apenas ilustrativo. Como os pólos da função (\*) são complexos não podemos passar (\*) para a forma de (9) e assim encontrar os valores  $k_m$ ,  $\delta$  e  $\gamma$ .

O método Pasek apresenta uma função de transferência cuja resposta ao degrau de 12 Volts, simulada neste relatório, bastante próxima a resposta real. Isto se deve ao fato de que o método utiliza procedimentos mais preciso de medição além de uma poderosa ferramenta computacional para encontrarmos os parâmetros do motor CC. Sua F.T descrita por (\*\*) pode ser expressa na forma de (9) e assim encontramos os valores de  $k_m$ ,  $\delta$  e  $\gamma$ .

O método de interpolação apresenta a melhor resposta simulada. Ou seja ao aplicarmos o degrau de 12 volts na entrada do motor, sua saída simulada é bem próxima a resposta real. Isto ocorre pois o método de interpolação utiliza os dados da resposta real para interpolar a curva de resposta e assim encontrar os parâmetros  $k_m$ ,  $\delta$  e  $\gamma$ .

Desta forma não temos diretamente os parâmetros elétricos e mecânicos do motor através de (\*\*\*), mas podemos encontrá-los.

Quando passamos (\*\*) e (\*\*\*) para a forma (9) verificamos que os parâmetros  $k_m$ ,  $\delta$  e  $\gamma$  resultantes são diferentes. Porém suas respostas são bastante próximas.

Através da análise anterior pode-se afirmar que os modelos representados pelas F.Ts (\*\*)  
e (\*\*\*) deverão ser utilizados para os procedimentos posteriores no curso, que visa  
controlar a velocidade angular do motor CC através de uma entrada de tensão.

Assim, como já foi dito, o modelo clássico (\*) tem apenas caráter ilustrativo e didático.

## **VI. Referências bibliográficas.**

[ Man 99]

**Aguiar, Manoel Luiz; De Oliveira, Vilma Alves; Vargas, Jerson Barbosa.** *Apostila  
de Apoio ao Laboratório de Controle II.* São Carlos 1999. SEL . EESC-USP