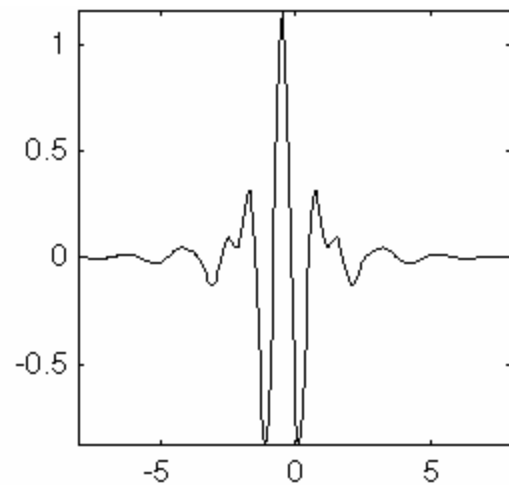
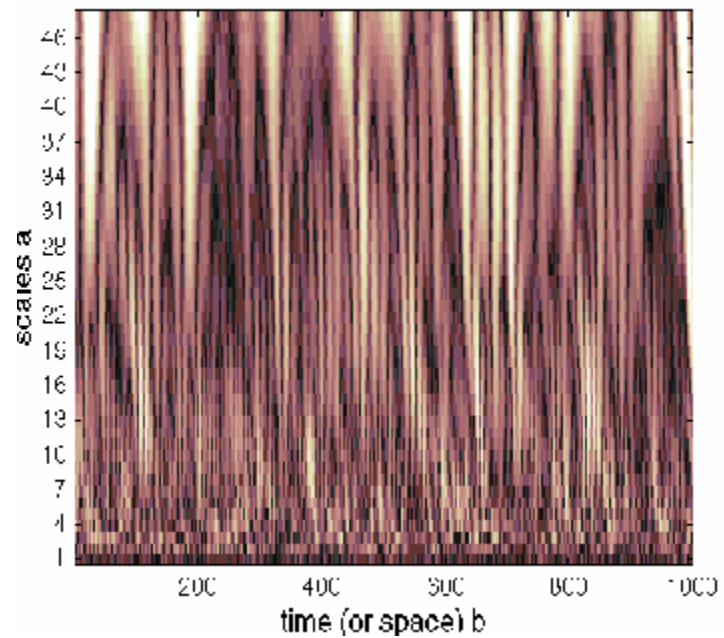


WAVELETS

Aplicações em processamento de imagens



Absolute Values of $C_{a,b}$ Coefficients for $a = 1\ 2\ 3\ 4\ 5 \dots$





Introdução

- **Morlet** estudando reflexão em Sismologia imaginou enviar pequenas formas de onda em altas frequências. Essas formas de onda são obtidas colocando uma escala em uma função chamada **Wavelet**.
- **Gabor, Morlet e Grossman** formalizaram a teoria 1984
- **Stephane G. Mallat** em 1988 apresentou um artigo em que apresentava a decomposição e modelos de Imagem baseados na teoria sobre **Wavelets**.



Transformada De Fourier

A transformada de Fourier e sua transformada inversa são definidas como:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i\omega t) dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp(i\omega t) d\omega$$

A transformada discreta Bidimensional de Fourier:

$$f(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) \exp[-j2\pi(un/M + vn/N)]$$

Transformada de Fourier Janelada

Definindo os produtos internos, contínuo e discreto:

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t)g(t)dt \qquad \langle x, y \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n]y[n]$$

As transformadas contínua e discretas são:

$$Sf(u, \xi) = \langle f, g_{u\xi} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t-u)\exp(-i\xi t)dt$$

$$Sf(m, l) = \langle f, g_{ml} \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} f[n]g[n-m]\exp(-i2\pi ln/N)$$

Sub e Super Amostragem

Seja uma seqüência $x[n]$ que amostra uma função contínua. A sub amostragem desta seqüência por um valor N , significa multiplicar cada elemento de $x[n]$ por um fator inteiro N . Isto é: $Y[n] = x[nN]$. Para evitar aliasing um filtro com freqüência de corte π/N é colocado antes da subamostragem. O filtro possui resposta ao impulso igual a: $h[n] = \frac{\text{sen } \pi n / N}{\pi n}$

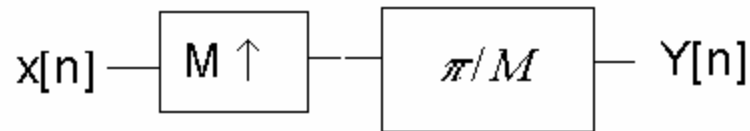




Sub e Super Amostragem

Inversamente é possível super amostrar uma seqüência $x[n]$ inserindo $M-1$ zeros entre amostras consecutivas da seqüência $x[n]$ de entrada. Assim:

$$y[n] = \begin{cases} x[n/M] & n = kM \\ 0 & \text{ademas} \end{cases} \quad h[n] = \frac{\text{sen } \pi n / N}{\pi n}$$





Wavelets

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$$

- Deve ser oscilatória
- Sua amplitude deve decrescer nas direções $-\infty$ e $+\infty$
- Não deve possuir componente de frequência zero.

- Transformada contínua
- Transformada Discreta **Wavelet**
 - Redundante
 - Ortogonal



Famílias de Wavelets e a Transformada Wavelet

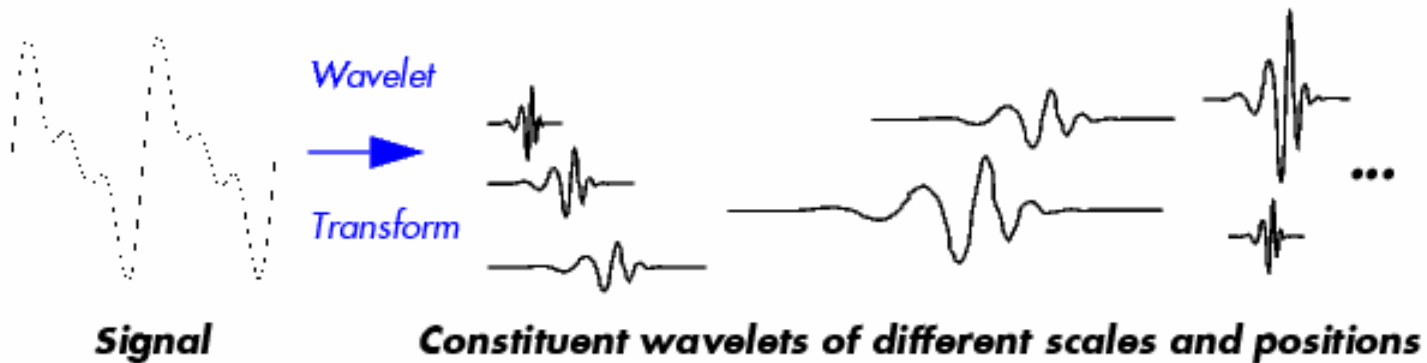
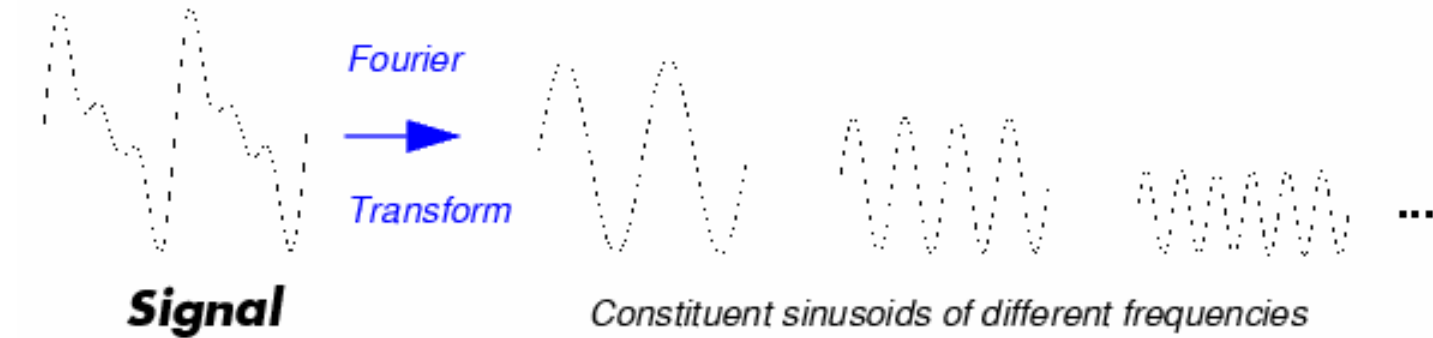
$$\psi_{u,s} = \frac{1}{\sqrt{s}} \Psi\left(\frac{t-u}{s}\right)$$

$$Wf(u,s) = \langle f, \psi_{u,s} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi^*\left(\frac{t-u}{s}\right) dt$$

Ex: Mexican Hat

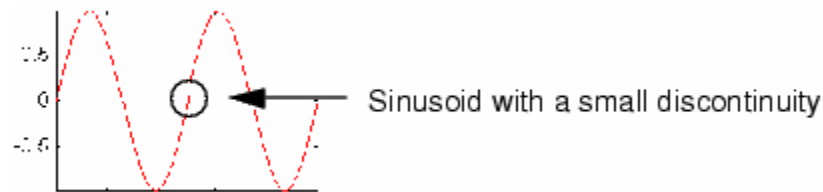
$$\psi(t) = \frac{2}{\pi^{\frac{1}{4}} \sqrt{3\sigma}} \left(\frac{t^2}{\sigma^2} - 1\right) \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)$$

Fourier X Wavelet

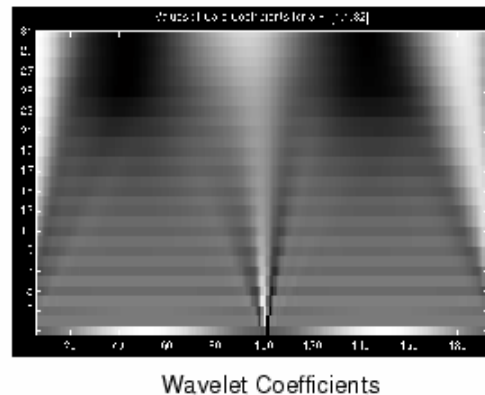
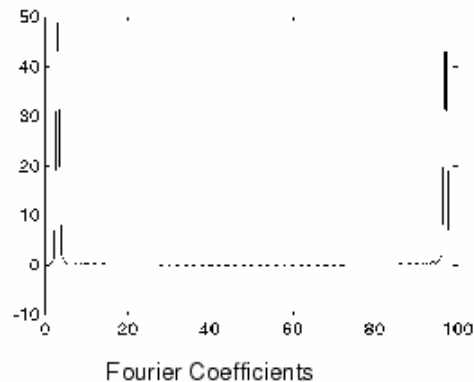


Por que usar Wavelets?

Permite realizar análises locais, uma área específica de um sinal.



A FFT do sinal acima apontaria um sinal de dois picos e uma só freqüência. O gráfico de uma Transformada **Wavelet** aponta exatamente onde está esta descontinuidade.





Wavelets Analíticas e Wavelets de Gabor 1D

Uma **Wavelet** Analítica é aquela em que $\hat{f}(\omega) = 0 \quad \omega = 0$

Uma Wavelet analítica que satisfaça: $\psi(t) = \exp(i\eta t)g(t)$

É chamada **Wavelet** de **Gabor**.

$$g(t) = \frac{1}{(\sigma\pi^2)^{1/4}} \exp(-t^2 / 2\sigma^2)$$

Segunda derivada de uma
Gaussiana



Wavelets discretas

$$\psi_j[n] = \frac{1}{\sqrt{a^j}} \psi\left(\frac{n}{a^j}\right)$$

$$wf[n, a^j] = \sum_{m=0}^{N-1} f(m) \psi_j^*[m - n]$$

Neste caso uma função $f(t)$ é representada por uma seqüência de números $f[m]$.



Frame

Um frame é uma família de vetores $\{\phi_n\}$ que caracteriza qualquer sinal f à partir dos produtos internos: $\{\langle f, \phi_n \rangle\}$.
um frame de $L^2(\mathbb{R})$ [espaço de funções que satisfaçam $\int |f(t)|^2 dt < +\infty$]



Transformada Wavelet Dyadic

Se uma família de **Wavelets** é um frame de L^2 , e fazendo $a=2$ dizemos que a família de **Wavelets** resultantes são **Wavelets Dyadic**.

$$Wf(u, 2^j) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{2^j}} \psi^* \left(\frac{t-u}{2^j} \right) dt$$



Wavelets Bidimensionaux

$$\psi_{2^j}^k(x, y) = \frac{1}{2^j} \psi^k\left(\frac{x}{2^j}, \frac{y}{2^j}\right)$$

$$W^k f(u, v, 2^j) = \langle f(x, y), \psi_{2^j}^k(x - u, y - v) \rangle$$



Wavelets de Gabor

$$\psi^k(x, y) = g(x, y) \exp[-i\eta(x \cos \alpha k + y \sin \alpha k)]$$

Variando 2^j e αk modifica-se o canal de frequência.

Oscilações na imagem produzem coeficientes **Wavelet** de altas amplitudes na escala e orientação correspondentes.



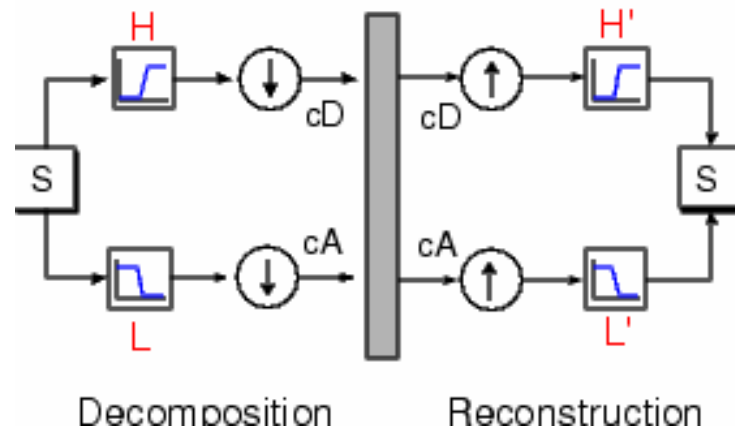
Projeto de Wavelets

h e g são dois filtros discretos com resposta a um degrau finita. H é um filtro passa baixas que satisfaz : $\hat{h}(0) = \sqrt{2}$

$$\hat{\phi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{h}(\omega/2) \phi(\omega/2)$$

$$\hat{\psi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{g}(\omega/2) \hat{\phi}(\omega/2)$$

Filtros Espelho de Quadratura





Projeto de Wavelets Bidimensionais

$$\phi_{j,n,m}(x, y) = \frac{1}{2^j} \phi\left(\frac{x - 2^j n}{2^j}\right) \phi\left(\frac{y - 2^j m}{2^j}\right)$$



Deteção Multiescala de Bordas

Seja $f(x,y)$ uma imagem. Os pontos limite de $f(x,y)$ são os pontos de inflexão de $f(x,y)$.

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial \vec{n}} = \frac{\partial f}{\partial x} a + \frac{\partial f}{\partial y} b$$

$$\vec{n} = (a,b)$$

θ É uma base de Riez (Um frame de vetores que são linearmente independentes).

$$\theta_{2^j}(x,y) = \frac{1}{2^j} \theta\left(\frac{x}{2^j}, \frac{y}{2^j}\right)$$

$$\bar{\theta}_{2^j}(x,y) = \theta_{2^j}\left(\frac{-x}{2^j}, \frac{-y}{2^j}\right)$$

$$\psi_{2^j}^1 = -2^j \frac{\partial \theta_{2^j}}{\partial x}$$

$$\psi_{2^j}^2 = -2^j \frac{\partial \theta_{2^j}}{\partial y}$$



Deteção Multiescala de Bordas

$$\theta(x, y) = 2\phi(2x)\phi(2y) \quad \left(\begin{array}{c} W^1 f(u, v, 2^j) \\ W^2 f(u, v, 2^j) \end{array} \right) = 2^j \left(\begin{array}{c} \frac{\partial(f * \bar{\theta}_{2^j})(u, v)}{\partial u} \\ \frac{\partial(f * \bar{\theta}_{2^j})(u, v)}{\partial v} \end{array} \right)$$
$$Mf(u, v, 2^j) = \sqrt{|W^1 f(u, v, 2^j)|^2 + |W^2 f(u, v, 2^j)|^2}$$

$$Af(u, v, 2^j) = \begin{cases} \alpha & \text{se } W^1 \geq 0 \\ \pi - \alpha & \text{se } W^1 < 0 \end{cases} \quad \alpha = \arctan \left[\frac{W^2 f(u, v, 2^j)}{W^1 f(u, v, 2^j)} \right]$$

As bordas multiescala são os pontos onde M é localmente máximo na direção de (u_0, v_0) com ângulo A

Cálculos Rápidos de Bordas Multiescala

$$\hat{\psi}^1(\omega) = \hat{g}(\omega x / 2) \hat{\phi}(\omega x / 2) \hat{\phi}(\omega y / 2)$$

$$\hat{\psi}^2(\omega) = \hat{g}(\omega y / 2) \hat{\phi}(\omega x / 2) \hat{\phi}(\omega y / 2)$$

$$\hat{g}(\omega) = -i\sqrt{2} \exp\left(-\frac{i\omega}{2}\right) \text{sen}(\omega/2) \quad \leftarrow$$

$$\hat{\phi}(\omega)$$

$$\frac{g[n]}{\sqrt{2}} = \begin{cases} -0.5 & \text{para } n = 0 \\ 0.5 & \text{para } n = 1 \\ 0 & \text{restante} \end{cases}$$

E para uma a transformada de uma "Box Spline Dyadic de grau m" (*)

$$\hat{\phi}(\omega) = \exp(-i\varepsilon\omega/2) \left(\frac{\text{sen}(\omega/2)}{\omega/2} \right)^{m+1} \quad \varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{se } m \text{ é par} \\ 0 & \text{se } m \text{ é ímpar} \end{cases}$$



Cálculos Rápidos de Bordas Multiescala

(*) Esta função é a translação de $m+1$ convoluções de $\mathbf{1}_{[0,1]}$ com ela mesmo. $\mathbf{1}_{[0,1]}$ é uma função que vale 1 no intervalo $[0,1]$ e 0 no restante.

$$\hat{h}(\omega) = \sqrt{2} \frac{\hat{\phi}(2\omega)}{\hat{\phi}(\omega)} = \sqrt{2} \exp(-i\epsilon\omega/2) [\cos(\omega/2)]^{m+1}$$

Os valores de $h[n]$ estão tabelados para valores de m

Algoritmo à trous para deteção Multiescala de Bordas

$$a_0[n, m] = \langle f(x, y), \phi(x-n)\phi(y-m) \rangle$$

$$a_j[n, m] = \langle f(x, y), \phi_{2^j}(x-n)\phi_{2^j}(y-m) \rangle$$

$$\bar{x}[n] = x[-n] \quad xy[n, m] = x[n]y[m]$$

$$a_0[n, m] \quad \delta[n]$$

$$a_{j+1}[n, m] = a_j * \bar{h}_j \bar{h}_j[n, m]$$

$$d_{j+1}^1[n, m] = a_j * \bar{g}_j \delta[n, m]$$

$$d_{j+1}^2[n, m] = a_j * \delta \bar{g}_j[n, m]$$

$$M_j f[n, m] = |d_j^1[n - 2^{j-1}, m]|^2 + |d_j^2[n, m - 2^{j-1}]|^2$$

$$A_j f[n, m] \quad \angle d_j^1, d_j^2$$

$k_j[n]$ é obtido à partir de um filtro $k[n]$ inserindo-se 2^j zeros entre cada amostra consecutiva

As bordas $[n, m]$ são os pontos onde M é máximo com respeito a seus 8 pixels vizinhos na direção quantizada de

$$A_j f[n, m] \quad \angle d_j^1, d_j^2$$



Transformada Wavelet 2D

$$\psi^1(x, y) = \phi(x)\psi(y)$$

$$\psi^2(x, y) = \psi(x)\phi(y)$$

$$\psi^3(x, y) = \psi(x)\psi(y)$$

para $1 \leq k \leq 3$

$$\psi_{j,n}^k(x, y) = \frac{1}{2^j} \psi\left(\frac{x - 2^j n}{2^j}, \frac{y - 2^j m}{2^j}\right)$$

$$\hat{\psi}^1(\omega x, \omega y) = \phi(\omega x)\psi(\omega y)$$

$$\hat{\psi}^2(\omega x, \omega y) = \psi(\omega x)\phi(\omega y)$$

$$\hat{\psi}^3(\omega x, \omega y) = \psi(\omega x)\psi(\omega y)$$



Transformada Wavelet 2D

$|\hat{\psi}^1(\omega x, \omega y)|$ é maior em frequências baixas horizontais ωx e frequências altas verticais ωy .

$|\hat{\psi}^2(\omega x, \omega y)|$ é maior em frequências altas horizontais e frequências baixas verticais.

$|\hat{\psi}^3(\omega x, \omega y)|$ é maior em frequências altas verticais e horizontais.

ψ^1 e ψ^2

são maiores na direção das bordas horizontais e verticais respectivamente .

ψ^3

Cantos.



Algoritmo Mallat

$$a_{j+1}[n, m] = a_j * \bar{h}\bar{h}[2n, 2m] \quad (\text{i})$$

$$d_{j+1}^1[n, m] = a_j * \bar{h}\bar{g}[2n, 2m] \quad (\text{ii})$$

$$d_{j+1}^2[n, m] = a_j * \bar{g}\bar{h}[2n, 2m] \quad (\text{iii})$$

$$d_{j+1}^3[n, m] = a_j * \bar{g}\bar{g}[2n, 2m] \quad (\text{iv})$$

(i) apresenta as aproximações multiresolução da imagem original $f(x, y)$, cuja amostra original é $a_0[n, m]$. (ii), (iii) e (iv) apresentam os coeficientes discretos da transformada **Wavelet** bidimensional. $h[n]$ e $g[n]$ são dois filtros como os descritos anteriormente. Este algoritmo pode ser iterado J vezes. **(ii) nos dá as bordas horizontais, (iii) as bordas verticais e (iv) os cantos da imagem.**

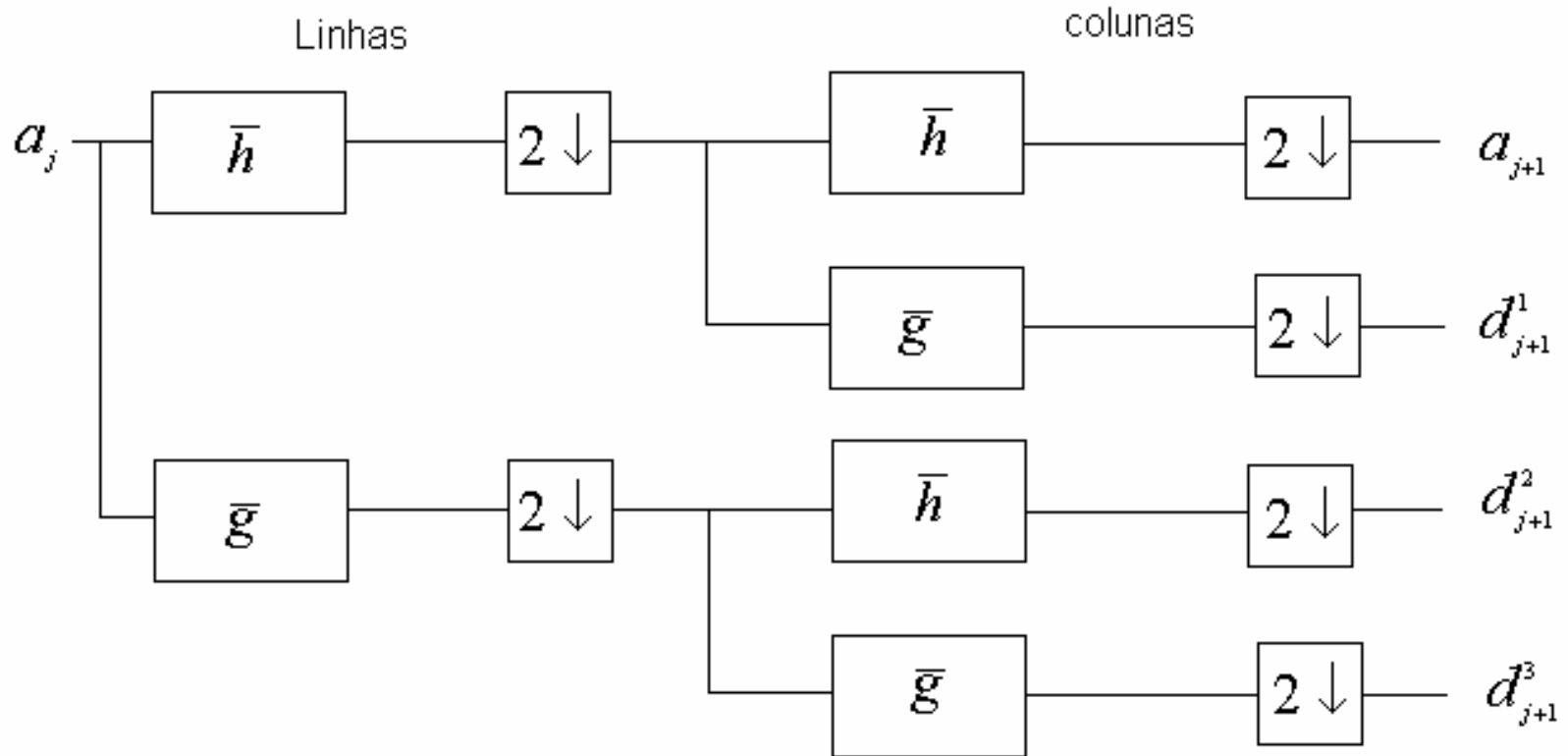


Algoritmo Mallat

Para $J=3$ pode-se esquematizar estas iterações na forma mostrada abaixo.

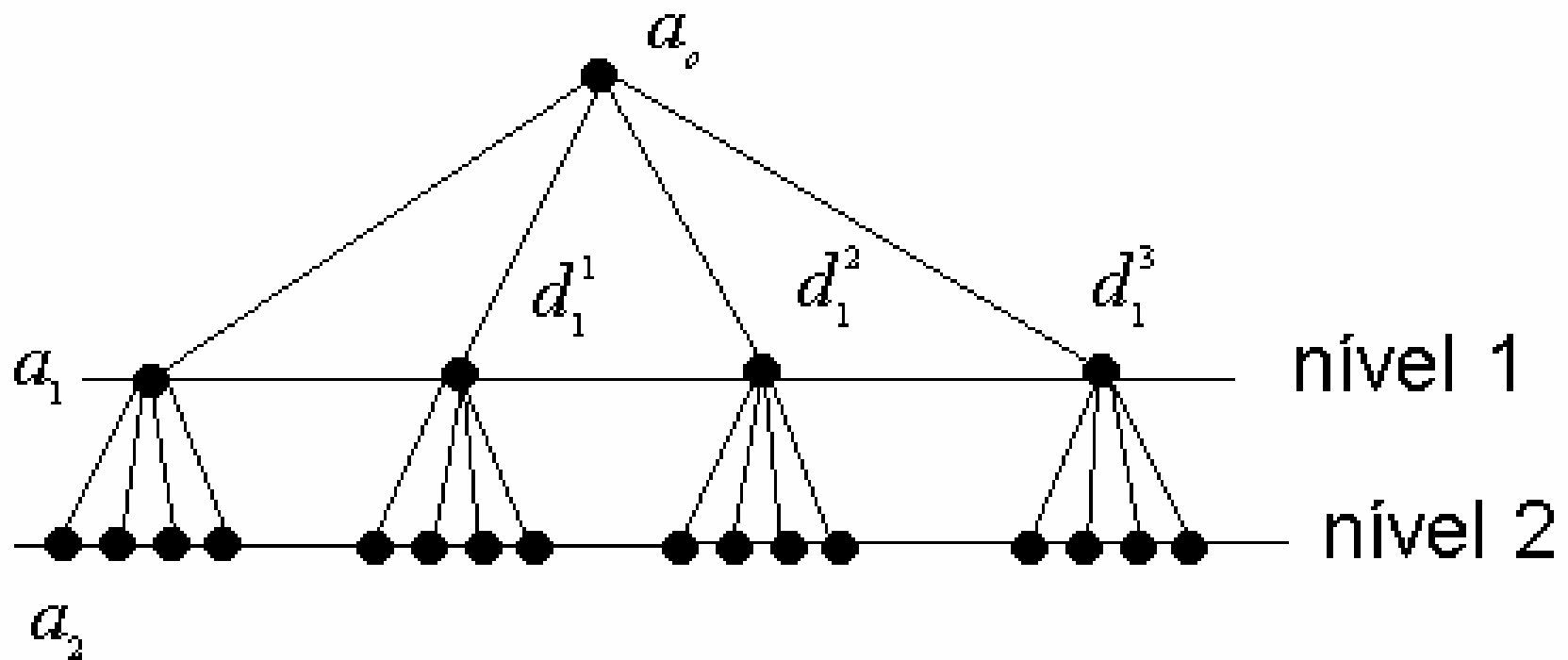
a_3	d_3^2	d_2^2	d_1^2
d_3^1	d_3^3		
d_2^1	d_2^3		
d_1^1			
			d_1^3

Algoritmo Mallat





Árvore de pacotes Wavelet

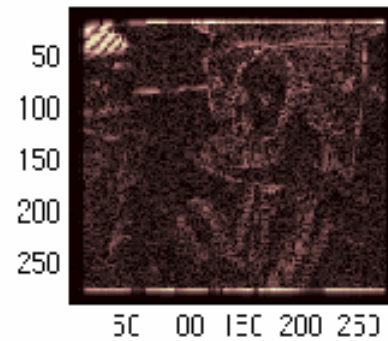


Exemplo de Decomposição

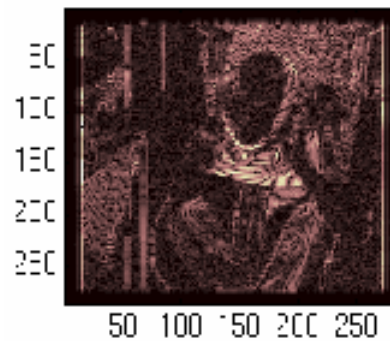
Approximation A1



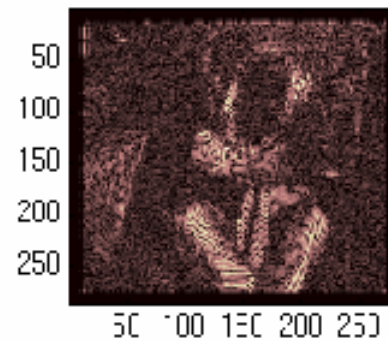
Horizontal Detail H1



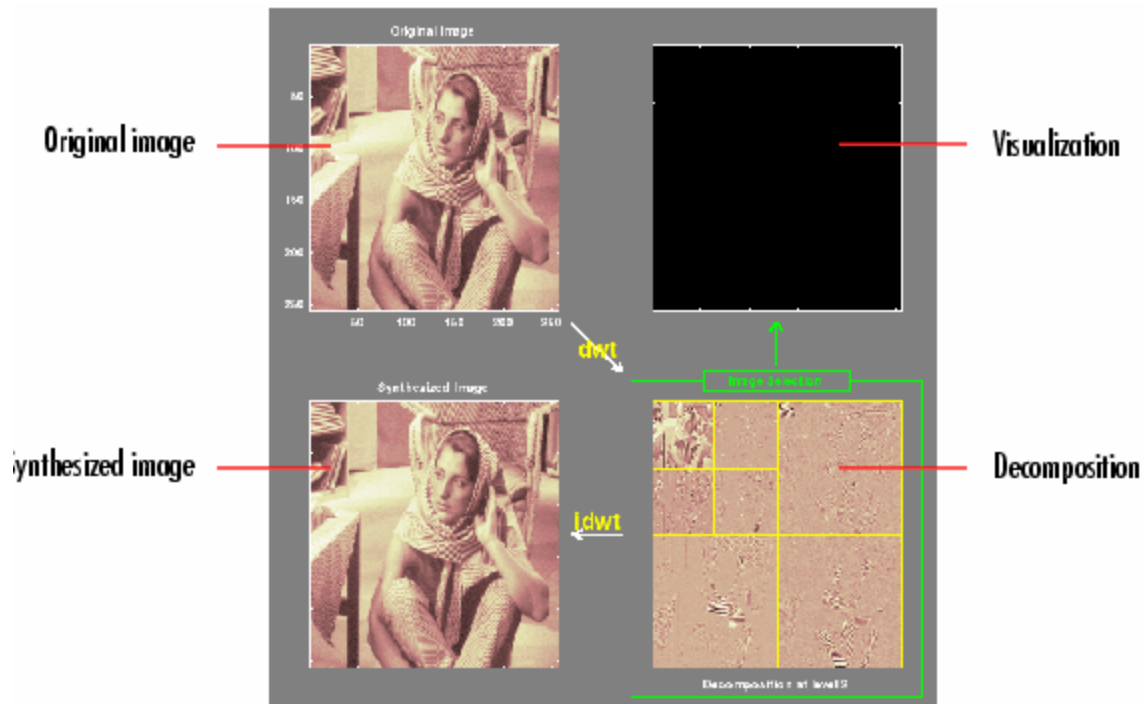
Vertical Detail V1



Diagonal Detail D1



Exemplo de Decomposição





Aplicações em Reconhecimento de Faces (1)

Em “**Wavelet Packet Analysis for Face Recognition**” (**Image Vision Computing 2000**), *C. Garcia, G. Zikos e G. Tziritas* apresentam um algoritmo para reconhecimento de faces baseado na decomposição de uma imagem em coeficientes discretos de **Wavelet**. A partir de uma estrutura em árvore e do algoritmo apresentado aqui anteriormente os autores fazem uma segmentação das estruturas faciais e depois apresentam um algoritmo para reconhecimento. Após decompor a imagem (nível 2) (para isso utilizando filtros H e G construídos através de resultados práticos, mas de acordo com as condições para filtros conjugados de quadratura), os autores realizam o seguinte procedimento:

- projeção vertical de d_1^2 (coeficientes **Wavelet** que representam detalhes verticais da imagem). Na imagem resultante acima, busca-se os valores de pico, ou seja, as bordas direita e esquerda. Assim definindo uma região chamada “bounding box”. Em d_1^1 (detalhes horizontais) busca-se pelos maiores coeficientes (boca, nariz, olhos). A projeção horizontal de d_1^1 dentro da “bounding box”. Os máximos dessa imagem fornecem 3 picos locais. -Olhos : 2 picos salientes. Nariz e Boca (pico encontrado no ponto médio dos picos correspondentes aos dois olhos. A face segmentada é então processada.



Aplicações em Reconhecimento de Faces (2)

Em sua tese de Doutorado, *Ron Jay Hoang* propõe um método de reconhecimento de olhos utilizando **Wavelets**. Considere $v(v) = -\sum \|vi\|^2 \ln \|vi\|^2$, esta equação é definida como Entropia **Shannon**. Vi são os coeficientes da transformada **Wavelet**. Selecionam-se os melhores Coeficientes **Wavelet** através da comparação da entropia do pacote de **Wavelets** em 3 níveis. Comparando a Entropia de cada par de nós adjacentes a entropia de sua união, a sub árvore é expandida somente se isso resultar em entropias menores. (Entropia mínima, menor dispersão, aglutinação). Uma janela de 32x8 é extraída manualmente e transformada num vetor 1D de 256 elementos. Em seguida, utilizando as **Wavelets** de *Daubechies* de ordem 2, os coeficientes da transformada são calculados. A partir deste vetor, a fórmula de entropia de **Shannon** é utilizada para gerar os dois melhores subconjuntos de 16 e 64 elementos., baseados no critério acima. Estas imagens Reconstruídas capturam características relevantes e descartam ruído estrutural. Em seguida faz-se a classificação.



Aplicações em Reconhecimento de Faces (3)

Utilizando as **Wavelets** de Gabor

$$\psi(t) = \exp(i\eta t) \frac{1}{(\sigma\pi^2)^{1/4}} \exp(-t^2 / 2\sigma^2)$$

Pode-se descrever uma imagem $f(x,y)$ como uma combinação linear de um conjunto de **Wavelets**. Primeiro sub divide-se a imagem em "grids" (sem "overlapping"). Em cada um desses pontos, a imagem é decomposta em coeficientes de **Wavelet**. Os coeficientes são "quase totalmente invariantes" com respeito a translação, escala e ângulo. Cada um desses conjuntos de **Wavelets** é definido como um "jet".

Jun Zhang, Yong Yan e Martin Lades em "**Face Recognition: Eingeface, Elastic Matching, and Neural Nets**" utilizam dos "jets" para implementar um sistema de reconhecimento de faces. Construindo "jets" que consistem de 5 níveis de freqüência espaçados em escala logarítmica e 8 orientações. O reconhecimento utilizando grids elásticos supera a dificuldade de "quase invariância" descrita acima. No mesmo artigo citado, os autores propõe que um "jet" pode ser elasticamente distorcido de maneira a encontrar a melhor correspondência entre duas imagens. Mudanças na expressão facial afetam os jets, mas a distorção dos grids detecta essas mudanças.



Sites Relacionados.

Livros e artigos.

"A Wavelet Tour of Signal Processing " *Stéphane G. Mallat*, 1998.

"Wavelets and Subband Coding" *Martin Vetterli, Jelena Kovacevic.*

"Multifrequency Channel Decompositions of Images and Wavelet Models", *Stephane G. Mallat* (artigo)

<http://www.wavelet.org>

<http://www.mathsoft.com/wavelets.html>

<http://www.geocities.com/danielvg.geo>

danielvg.geo@yahoo.com