

IME Matemática 1990

01) Calcule o determinante da matriz $n \times n$ que possui zeros na diagonal principal e todos os outros elementos iguais a 1.

02) Ligando as cidades A e B existem duas estradas principais. Dez estradas secundárias de mão dupla, ligam as duas estradas principais, como mostra a figura. Quantos caminhos, sem auto-interseções, existem de A até B?

Obs. Caminho sem auto-interseções é um caminho que não passa por um ponto duas ou mais vezes.



03) Considere a família de retas representada pela equação: $Y = mx - \frac{p(1+m^2)}{2m}$, Onde p é uma constante positiva dada e m um número real variável.

a) Determine a condição para que num ponto $M = (x_0, y_0)$ do plano cartesiano, passem duas retas dessa família.

b) Determine o lugar geométrico dos pontos M para os quais as retas que por eles passem sejam perpendiculares.

04) Considere as seguintes funções:

$$f(x) = a^x, \text{ onde } a > 1$$

$$g(x) = \sqrt{2px}, \text{ onde } p > 0$$

Mostre que uma condição necessária e suficiente para que seus gráficos se tangenciem é: $a = e^{\frac{p}{e}}$. Neste caso, determine, em função de p , a equação da tangente comum.

05) Na elipse de excentricidade $\frac{1}{2}$, foco na origem e reta diretriz dada por $3x + 4y = 25$, determine:

a) Um dos focos da elipse.

b) O outro foco.

c) A equação da outra reta diretriz.

06) Considere a função $f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x^n + \frac{1}{x^n})^{\frac{1}{n}}$ definida em $0 < x < \infty$. Calcule o valor de f em cada ponto e esboce seu gráfico.

07) Resolva a equação: $z^5 = \bar{z}$, onde \bar{z} é o conjugado do número complexo z .

08) Seja f uma função definida nos inteiros positivos satisfazendo:

$$f(1) = 1$$

$$f(2n) = 2.f(n) + 1$$

$$f(f(n)) = 4n - 3$$

Calcule $f(1990)$.

09) IMEBOL é um jogo de três jogadores. Em cada partida o vencedor marca a pontos, o segundo colocado marca b pontos e o terceiro colocado marca c pontos, onde $a > b > c$ são inteiros positivos. Certo dia, Marcos, Flávio e Ralph resolveram jogar IMEBOL e após algumas partidas a soma de pontos foi:

Marcos : 20 Flávio : 10 Ralph : 9

Sabe-se que Flávio venceu a segunda partida. Encontre quantos pontos cada um marcou em cada partida disputada.

10) Para que valores de p a equação: $x^4 + px + 3 = 0$ tem raiz dupla? Determine, em cada caso, as raízes da equação.