

IME Matemática 1991

01) Determine todas as matrizes X reais, de dimensões 2×2 , tais que $AX=XA$, para toda matriz A real 2×2 .

02) Dado o conjunto $A=\{1, 2, 3, \dots, 102\}$, pede-se o número de subconjuntos de A , com três elementos, tais que a soma destes seja um múltiplo de três.

03) A coleção de selos de Roberto está dividida em três volumes. Dois décimos do total de selos estão no primeiro volume, alguns sétimos do total estão no segundo volume e 303 selos estão no terceiro volume. Quantos selos Roberto tem?

04) Mostre que o número $x = \sqrt[3]{3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}} - \sqrt[3]{-3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}}$ é racional.

05)(A) – Sendo dada a equação $x^3 + px + q = 0$, $p, q \in \mathbb{R}$, que relação deverá existir entre p e q para que uma das raízes seja igual ao produto das outras duas?

05)(B) – Mostre que a equação $x^3 - 6x - 4$, satisfaz a relação encontrada e, em seguida, encontre as suas raízes.

06) Seja $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 < x < 1 \text{ e } 0 < y < 1\}$ e $F: D \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma função tal que $\forall (x, y) \in D$ associa $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ onde: $\begin{cases} X = y \\ Y = (1-y)x \end{cases}$.

a) Sendo $T = \{(x, y) / \lambda > 0, y > 0, x + y < 1\}$ mostre que F é uma bijeção de D sobre T .

b) Esboce a imagem dos conjuntos da forma para os seguintes valores de λ : $\lambda_0 = \frac{1}{4}; \lambda_1 = \frac{1}{2}; \lambda_2 = 1$.

07) Mostre que:

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \frac{\sin \frac{(2n+1)x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}}.$$

08) Dada a função racional: $f(x) = \frac{x^3 + ax^2 + bx + c}{mx^2 + nx + p}$

e sabendo que $a, b, c, m, n, p \in \mathbb{Z}$ e que:

1) $f(2) = 0$

2) Para $x = -1$ tem-se uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$.

3) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -6$

4) $x = 1$ é raiz do polinômio $mx^2 + nx + p$.

5) $f(3) = \frac{1}{f(4)}$

Determine os coeficientes a, b, c, m, n, p .

09) Determine o quadrado $OABC$ cujos vértices são a origem e os pontos $A(1,1)$, $B(0,2)$, $C(-1,1)$. Seja $F(0,1)$ o centro desse quadrado e P a parábola de foco F e cuja diretriz é o eixo das abscissas. Pede-se:

a) Mostre que P passa por A e C .

b) Determine a equação dessa parábola.

c) Calcule as coordenadas do ponto D , segundo ponto de interseção da reta BC com P .

d) Seja M um ponto qualquer de P cuja abscissa é x . Mostre que a potência M em relação ao círculo C de diâmetro CD é $\frac{1}{4}(x+1)^3(x-3)$.

e) A partir do resultado anterior, encontre o conjunto dos pontos de P interiores a C .

10) A partir do estudo da variação do sinal das funções

$f(x) = \ln(1+x) - x$ e $g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$, deduza a relação

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x, \forall x \in]0; +\infty[.$$

10)(B) – Sendo $n \in \mathbb{Z}^+$, seja

$P(n) = (1 + \frac{1}{n^2})(1 + \frac{2}{n^2}) \dots (1 + \frac{n-1}{n^2})$. Mostre que se $n \rightarrow \infty$, $P(n)$ admite um limite e calcule esse limite.