

IME Matemática II 1991

01) Sejam um círculo, com centro O e raio R, e um ponto P tal que $OP=3R$.

a) Determine um diâmetro MN de modo que o triângulo PMN seja retângulo com ângulo reto em M.

b) Calcule, em função de R, os lados e a área do triângulo PMN.

d) PN intercepta a circunferência em um segundo ponto K. Calcule PK.

d) O diâmetro MN gira em torno de O. Qual o lugar geométrico dos pés das perpendiculares traçadas de P sobre MN?

e) Determine a posição do diâmetro MN para que a área do triângulo PMN seja máxima.

02) Considere um círculo e uma reta que não se interceptam, ambos contidos num plano. Determine o lugar geométrico dos círculos que são tangentes ao círculo dado (exteriormente) e à reta dada.

03) Sejam dois quadrados ABCD e ABEF, tendo um lado comum AB, mas não situados num mesmo plano. Sejam M e N pertencentes, respectivamente, às diagonais AC e BF tais que $\frac{AM}{AC} = \frac{BN}{BF} = \frac{1}{3}$. Mostre que MN é paralelo a DE.

04) Sejam A, B e C os ângulos de um triângulo. Mostre que:

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$$

05) Mostre que: Se num triângulo ABC vale a relação: $\frac{\cos(B-C)}{\sin A + \sin(C-B)} = \tan B$ então o triângulo é retângulo com ângulo reto em A.

6ª Questão – Seja um cone reto de base circular, vértice V, altura h e raio da base r e seja ABC um triângulo equilátero circunscrito à base do cone. Pede-se:

a) Determinar a relação entre h e r para que o tetraedro, com vértices VABC, seja regular.

b) Satisfeitas essas condições, calcule, em função de r, o volume limitado pelo superfície do cone, pelo plano de sua base e pelos dois planos tangentes que assam pela aresta VA.

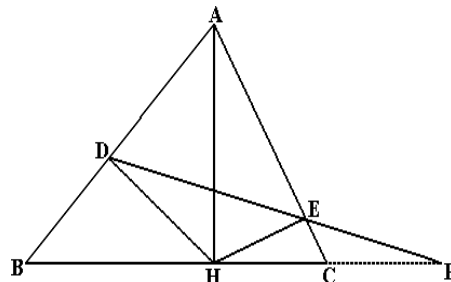
07) Resolver o sistema: $\begin{cases} \tan^2 x + \tan^2 y = 6 \\ \frac{\tan x}{\tan y} + \frac{\tan y}{\tan x} = -6 \end{cases}$. Sabendo que

x e y pertencem ao intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

08) Seja, sobre uma esfera, um círculo máximo C com diâmetro $AB=2R$. Traçam-se: uma corda MN do círculo C, paralela a AB, e duas retas x e y perpendiculares ao plano do círculo de diâmetro AB e passando, respectivamente, por M e N. Os planos definidos pelo ponto A e a reta x e o definido pelo ponto A e a reta y cortam a esfera segundo dois círculos. Mostre que

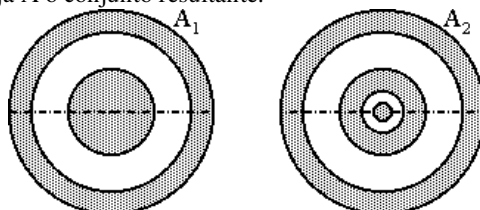
quando MN varia, mantendo-se paralela a AB, a soma dos quadrados de seus raios é constante.

09) Num triângulo ABC traçamos a altura AH e do pé H dessa altura construímos as perpendiculares HD e HE sobre os lados AB e AC; seja P o ponto de interseção DE com BC. Construindo as alturas relativas aos vértices B e C determina-se também, de modo análogo Q e R sobre os lados AC e AB. Demonstre que os pontos P, Q e R são colineares.



10) no plano, considere um disco de raio R, chame este conjunto de A_0 . Divida um raio de A_0 em três segmentos congruentes e retire de A_0 a coroa circular de raios $\frac{1}{3}R$ e $\frac{2}{3}R$, chame este conjunto de A_1 . O conjunto A_1

contém um disco de raio $R_1 = \frac{1}{3}R$, divida um raio deste disco em três segmentos e, mais uma vez, retire de A_1 a coroa circular de raios $\frac{1}{3}R_1$ e $\frac{2}{3}R_1$, chame este conjunto de A_2 . Continue esse processo indefinidamente e seja A o conjunto resultante.



a) Calcule a área do conjunto A_n obtido após a n-ésima etapa do processo descrito acima.

b) Calcule a área do conjunto resultante A.