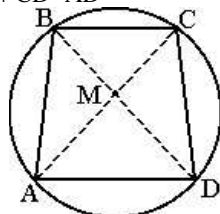


**IME Matemática 1992**

**01)** Prove que  $\overline{Z_1 + Z_1} = \overline{Z_1} + \overline{Z_2}$ , onde  $Z_1$  e  $Z_2 \in \mathbb{C}$ .

**02)** Encontre todas as soluções de  $\sec x - 2\cos x = 1$  em  $[0, 2\pi]$ .

**03)** Dado o quadrilátero ABCD, inscrito num círculo de raio  $r$ , conforme a figura abaixo, prove que:

$$\frac{AC}{BD} = \frac{AB \cdot AD + BC \cdot CD}{AB \cdot BC + CD \cdot AD}$$


**04)** Calcule quantos números naturais de 3 algarismos distintos existem no sistema de base 7.

**05)** determine a equação da reta que passa por um dos vértices da curva definida por:  $4y^2 + 8y - x^2 = 4$ , formando um ângulo de  $45^\circ$  com o eixo horizontal.

**06)** Dados:

1) um cone de revolução com vértice  $S$  e cuja base circular está situada num plano  $\pi$ .

2) Um ponto  $P$  exterior ao cone e não pertencente a  $\pi$ .

Pede-se: determinar, pelo ponto  $P$ , os planos tangentes ao cone.

**07)** A partir da função  $R(t) = e^{-At} + \frac{A}{B-A}(e^{-At} - e^{-Bt})$ , onde  $t$  é variável (tempo) e  $A$  e  $B$  são constantes reais, encontre a expressão de  $R(t)$ , para o caso em que  $A$  tende a  $B$  de modo que  $R(t)$  seja uma função contínua.

**08)** Seja  $f: [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua tal que:

1)  $f(0) = 0$

2)  $f'(x) = \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2}, \forall x \in ]0, \infty[$

3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

Pede-se:

a) os intervalos onde  $f$  é crescente (respectivamente, decrescente).

b) Os intervalos onde o gráfico de  $f$  é côncavo para cima (respectivamente, para baixo).

c) Onde ocorrem os pontos de máximo e mínimo absolutos e de inflexão?

Defina  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  por:  $g(x) = \begin{cases} f(x); & x \geq 0 \\ -f(x); & x < 0 \end{cases}$ . Esboce o gráfico de  $g$ .

**09)** Calcule o valor do determinante abaixo:

$$D_n = \begin{vmatrix} m+x & m & m & m & \dots & m \\ m & m+x & m & m & \dots & m \\ m & m & m+x & m & \dots & m \\ m & m & m & m+x & \dots & m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m & m & m & m & \dots & m+x \end{vmatrix}$$

**10)** Sejam  $E_0 = [0, 1]$  e  $f_1, f_2: E_0 \rightarrow E_0$  funções definidas por  $f_1(x) = \frac{1}{3}x$  e  $f_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ . Se  $P(E_0)$  é o conjunto das partes de  $E_0$ , seja  $F: P(E_0) \rightarrow P(E_0)$  a função definida por  $F(A) = f_1(A) \cup f_2(A)$ , onde  $f_i(A)$  é a imagem de  $A$  por  $f_i, i = 1, 2$ .

Agora, para cada  $n \geq 1$  definimos  $E_n = F(E_{n-1})$ .

a) Esboce graficamente  $E_0, E_1, E_2$  e  $E_3$ . Mostre que  $E_n \subset E_{n-1}$ .

b) Calcule  $\lim_{n \rightarrow \infty} |E_n|$ , onde  $|E_n|$  é a soma dos comprimentos dos intervalos que formam  $E_n$ .