

IME Matemática 1993

01) Considere a função $x^3 + ax^2 + bx + c$, onde a , b e c são inteiros positivos. Sabendo-se que uma das raízes dessa equação é igual a $2i$, calcular os menores valores de a , b e c para que exista um ponto de máximo e um ponto de mínimo reais.

02) Numa escola há 15 comissões m todas com igual número de alunos. Cada aluno pertence a duas comissões e cada duas comissões possui exatamente um membro em comum.

Todos os alunos participam.

- a) Quantos alunos tem a escola?
b) Quantos alunos participam de cada comissão?

03) Prove, por indução, que:

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^n b^n \text{ para } n \in \mathfrak{R}.$$

04) Indique se é verdadeiro (V) ou falso (F) o que se segue, e justifique sua resposta.

- a) O conjunto dos números reais não tem pontos extremos reais.
b) Existe um número em \mathbf{Q} (racionais) cujo quadrado é 2.
c) O ponto correspondente a $66/77$ na escala dos números reais, \mathfrak{R} , está situado entre os pontos $55/66$ e $77/88$.

05) Determine o valor de x para que:

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 4 & 6 \\ x & x+2 & 0 & 10 \\ x^2 & 0 & 4x & 4 \\ x & 4 & 10 & x-2 \end{vmatrix} = 0$$

06) Faça o que se pede:

- a) calcule o argumento do seguinte número complexo $i(1+i)$.
b) escreva sob a forma trigonométrica o número complexo $z = 1 + i\sqrt{3}$.

07) Considere uma função $L: \mathbf{Q}^+ \rightarrow \mathbf{Q}$ que satisfaz:

1. L é crescente, isto é para quaisquer $0 < x < y$ tem-se $L(x) > L(y)$.
2. $L(x \cdot y) = L(x) + L(y)$ para quaisquer $x, y > 0$.

Mostre que:

- a) $L(1) = 0$ b) $L(1/x) = -L(x)$
c) $L(x/y) = L(x) - L(y)$ d) $L(x^n) = n \cdot L(x)$
e) $L(\sqrt[n]{x}) = (1/n)L(x)$ f) $L(x) < 0 < L(y)$, sempre que $0 < x < 1 < y$.

08) Demonstrar analiticamente que se uma reta, perpendicular a uma corda de uma circunferência, passa pelo seu centro, então, ela divide a corda no seu ponto médio.

09) Provar que a soma das distâncias de um ponto qualquer interior a um triângulo equilátero aos lados é constante.

10) Resolva a equação:

$$\sin x - \cos x = \sin 2x - \cos 2x - 1$$