

**IME MATEMÁTICA 1994**

**01)** Determine o termo independente de  $x$  de

$$\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}.$$

**02)** Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função quadrática tal que  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Sabendo que  $x_1 = -1$  e  $x_2 = 5$  são raízes e que  $f(1) = -8$ , pede-se:

- a) determinar  $a$ ,  $b$  e  $c$ ;
- b) calcular  $f(0)$ ;
- c) verificar se  $f(x)$  apresenta máximo ou mínimo, justificando a resposta;
- d) as coordenadas do ponto extremo;
- e) o esboço do gráfico.

**03)** Seja um octógono convexo. Suponha que quando todas as diagonais são traçadas não há mais de duas diagonais se interceptando no mesmo ponto. Quantos de pontos de interseção (de diagonais) existem neste octógono?

**04)** Considere os números complexos  $z = x + y.i$  e  $w = x - y.i$ , cujos módulos são tais que  $|z| = e^{\frac{\sqrt{3}}{x}}$  e  $|w| = e^{\frac{1}{y}}$ , onde  $e$  é a base dos logaritmos neperianos. Obter a forma polar de  $z^2$ .

**05)** Um aluno, ao inverter a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & c & d \\ 4 & e & f \end{bmatrix} = [a_{i,j}], 1 \leq i, j \leq 3$$

Cometeu um engano e considerou o elemento  $a_{1,3}$  igual a 3, de forma que acabou invertendo a matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & c & d \\ 3 & e & f \end{bmatrix} = [b_{i,j}]$$

Com esse engano o aluno encontrou:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 5/2 & 0 & -1/2 \\ 3 & 1 & -1 \\ -3/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Determinar  $A^{-1}$

**06)** Seja  $y = x^2/2$  uma parábola com foco  $F$  e diretriz  $d$ . Uma reta, cujo coeficiente angular é  $m \neq 0$ , passa por  $F$  e corta a parábola em dois pontos  $M_1$  e  $M_2$ , respectivamente. Seja  $G$  o conjugado harmônico de  $F$  em relação a  $M_1$  e  $M_2$ . Pede-se:

- a) as coordenadas de  $G$  em função de  $m$ .
- b) o lugar geométrico do ponto  $G$  quando  $m$  varia.

**07)** Sabendo que  $A$ ,  $B$  e  $C$  são ângulos internos de um triângulo, escreva as restrições que devem ser satisfeitas por este triângulo para que se verifique a igualdade abaixo.

$$\text{sen}A + \text{sen}B + \text{sen}C = 4.\cos(A/2).\cos(B/2).\cos(C/2)$$

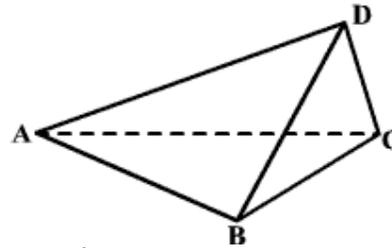
**08)** Seja  $ABCD$  um quadrilátero convexo inscrito num círculo e seja  $I$  o ponto de interseção de suas diagonais. As projeções ortogonais de  $I$  sobre os lados  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  e  $DA$  são, respectivamente,  $M$ ,  $N$ ,  $P$  e  $Q$ . Prove que o quadrilátero  $MNPQ$  é circunscritível a um círculo com centro em  $I$ .

**09)** Seja  $C$  um semicírculo com centro  $O$  e diâmetro  $PQ = 2r$ . Sobre o segmento  $OP$ , toma-se um ponto  $N$  tal que  $ON = x$ ,  $0 \leq x \leq r$ . Por  $N$  traça-se uma reta perpendicular a  $PQ$  que encontre o semicírculo em  $M$ . A reta tangente ao semicírculo em  $M$  corta a reta  $PQ$  em um ponto  $T$ :

- a) Calcule, em função de  $r$  e  $x$ , o volume  $V_1$  gerado pela rotação do triângulo  $MPQ$  em torno de  $PQ$ .
- b) Calcule, em função de  $r$  e  $x$ , o volume  $V_2$  gerado pela rotação do triângulo  $MPT$  em torno de  $PQ$ .
- c) Considere a razão  $y = V_2/V_1$ , quando  $x$  varia no intervalo  $[0, r]$ , faça o esboço do respectivo gráfico.

**10)** Na exploração de uma mina foi feito o corte indicado na figura abaixo. Para calcular o volume do minério extraído do corte, foram medidos:

$CD = 10\sqrt{3}$  dm,  $CD$  é perpendicular ao plano  $ABC$ ,  $ADC = ADB = 60^\circ$  e  $EDC = 30^\circ$



Calcule esse volume.