

IME MATEMÁTICA 1995

01) Determine a condição que o inteiro m deve satisfazer para que exista termo independente de x no desenvolvimento de

$$\left(x^4 - \frac{1}{x^8}\right)^m.$$

02) Seja ABC um triângulo qualquer no qual os vértices B e C são fixos. Determine o lugar geométrico descrito pelo ponto A , variável, sabendo que os ângulos B e C satisfazem à relação $\operatorname{tg}B \cdot \operatorname{tg}C = k$, k constante real.

Sugestão: Considere como eixos coordenados as retas BC e a mediatriz do segmento BC .

03) Dado $Z = \frac{1}{\sqrt{7+24i}}$, calcule as partes real e imaginária de Z .

04) Sabendo-se que a função $h(x)$ possui a seguinte propriedade $\frac{dh(x)}{dx} = -h(x)$, pede-se:

a) A solução da equação: $\int tf(t) = xh(x) + h(x) + 1$.

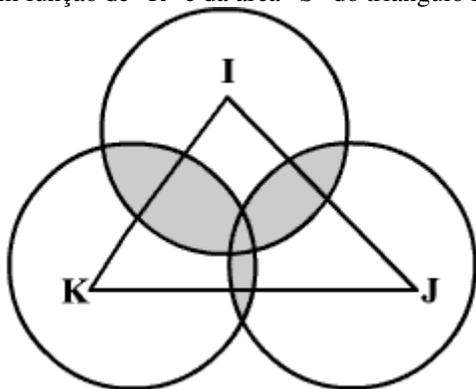
b) Os valores de C e $h(x)$, de tal forma que: $\int_0^C tf(t) = \frac{e-2}{e}$.

05) Resolva a equação trigonométrica: $\operatorname{sen} x + \cos x + 2\sqrt{2} \operatorname{sen} x \cos x = 0$.

06) Use o teorema do valor médio para derivadas e prove que a equação: $\ln(x+1)^5 + 4 \cdot \ln(x+1)^3 + 2 \cdot \ln(x+1) - 2 = 0$, tem uma única raiz real no intervalo $(0, 1)$.

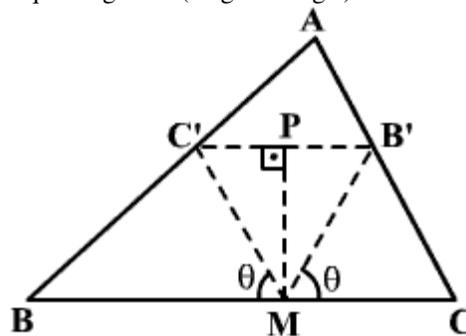
OBS: A notação \ln significa logaritmo neperiano.

07) Três círculos de mesmo raio " R " se interceptam dois a dois, como é mostrado na figura abaixo, constituindo três áreas comuns que formam um trevo. Determine o perímetro do trevo e sua área em função de " R " e da área " S " do triângulo IJK .



08) Seja ABC um triângulo qualquer. Por B' e C' , pontos médios dos lados AB e AC , respectivamente, traçam-se duas retas que se cortam em um ponto M , situado sobre o lado BC , e que fazem

com esse lado ângulos iguais a θ conforme a figura abaixo. Demonstre que $\cotg\theta = \frac{1}{2}(\cotgB + \cotgC)$



09) Seis esferas idênticas de raio " R " encontram-se posicionadas no espaço de tal forma que cada uma delas seja tangente a quatro esferas. Desta forma, determine a aresta do cubo que tangencie todas as esferas.

10) Prove que o polinômio $P(x) = x^{999} + x^{888} + x^{777} + \dots + x^{111} + 1$ é divisível por $x^9 + x^8 + x^7 + \dots + x + 1$.