

IME Matemática 1995

01) Considerando $\log 2 = a$ e $\log 3 = b$, encontre, em função de a e b , o logaritmo do número $\sqrt[3]{1,25}$ no sistema de base 15.

02) Encontre todas as soluções reais da equação apresentada abaixo, onde n é um número natural.

$$\cos^n x - \sin^n x = 1$$

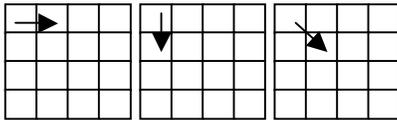
03) Um triângulo ABC tem base AB fixa sobre uma reta r . O vértice C desloca-se ao longo de uma reta s , paralela a r e a uma distância h da mesma. Determine a equação da curva descrita pelo ortocentro do triângulo ABC.

04) Seja f uma função real tal que $\forall x, a \in \mathbb{R}: f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - [f(x)]^2}$. Diga se f é periódica. Justifique.

05) Calcule a soma abaixo:

$$\frac{1}{1 \times 4} + \frac{1}{4 \times 7} + \frac{1}{7 \times 10} + \dots + \frac{1}{2998 \times 3001}$$

06) É dado um tabuleiro quadrado 4×4 . Deseja-se atingir o quadrado inferior direito a partir do quadrado superior esquerdo. Os movimentos permitidos são os representados pelas setas:



De quantas maneiras isto é possível?

07) Sejam 5 (cinco) pontos AOBO'A', nesta ordem pertencentes a uma reta genérica r tal que $AO=OB=3a$; $BO'=O'A'=2a$, onde a é um comprimento dado. Traçam-se os círculos C com diâmetro AB e C' com diâmetro BA'. Sejam D e E dois pontos quaisquer do círculo C; as retas BC e BD cortam o círculo C', respectivamente, em D' e E'.

a) Calcule BD'/BD

b) Calcule $D'E'/DE$

c) Seja o ângulo CDB igual a 30° . Calcule em função de a , a razão entre as áreas dos segmentos circulares S no círculo C limitado pela corda DE e S' no círculo C' limitado pela corda D'E'.

08) Determine os números naturais n para os quais existem poliedros convexos de n arestas.

09) Sejam $w_0 = 1$, $w_1 = j$, $w_2 = j^2$ as raízes cúbicas da unidade no plano complexo (considere w_1 o número complexo de módulo 1 e argumento $2\pi/3$). Sabendo-se que se $c \in \mathbb{C}$, a rotação R em torno do ponto c e amplitude igual a $\pi/3$ é dada por $R(z) = -j^2 Z - jc, \forall c \in \mathbb{C} - \{c\}$, pede-se:

a) Determinar as relações existentes entre a, b, c, j e j^2 , onde $a, b \in \mathbb{C}$, de modo que o triângulo abc seja equilátero.

b) Determinar z para que o triângulo i, z, iz seja equilátero.

Dado: $i = \sqrt{-1}$

10) Dados dois trinômios do segundo grau:

I. $ax^2 + bx + c$

II. $a'x^2 + b'x + c'$

Considere, sobre o eixo Ox , os pontos A e B cujas abscissas são as raízes do trinômio (I) e A' e B' os pontos cujas abscissas são raízes do trinômio (II).

Determine a relação que deve existir entre os coeficientes a, b, c, a', b' e c' de modo que $A'B'$ divida o segmento AB harmonicamente