

IME Matemática 1997

01) Resolva o sistema abaixo:

$$\begin{cases} x^y = y^x \\ y = ax \end{cases} \quad \text{onde } a \neq 1 \text{ e } a > 0$$

02) Determine o termo máximo do desenvolvimento da

expressão: $\left(1 + \frac{1}{3}\right)^{65}$

03) Dados os pontos A e B do plano, determine a equação do lugar geométrico dos pontos P do plano, de tal modo que a razão entre as distâncias de P a A e de P a B seja dada por uma constante K. Justifique a sua resposta analiticamente, discutindo toda as possibilidades para K

04) Em cada uma das 6 (seis) faces de um cubo, construiu-se uma circunferência, onde foram marcados **n** pontos. Considerando que 4 (quatro) pontos não pertencentes à mesma face, não sejam coplanares, quantas retas e triângulos, não contidos nas faces desse cubo, são determinados pelos pontos?

05) Considere a função

$$y = f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad \text{onde } \ln \text{ denota o logaritmo neperiano.}$$

Responder aos itens a seguir, justificando sua resposta.

a) Se $g(x) = \ln(2x)$, que relação existe entre os gráficos das curvas f e g

b) Pode-se afirmar que a função definida por

$$H(x) = \frac{f(x)}{2} \quad \text{é uma primitiva para a função}$$

$$T(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{x^2 + 1}} ?$$

06) Se tga e tgb são raízes da equação $x^2 + px + q = 0$. Calcule, em função de p e q , o valor simplificado da expressão:

$$y = \sin^2(a+b) + p \cdot \sin(a+b) \cos(a+b) + q \cdot \cos^2(a+b)$$

Considere $p, q \in \mathbb{R}$ com $q \neq 1$.

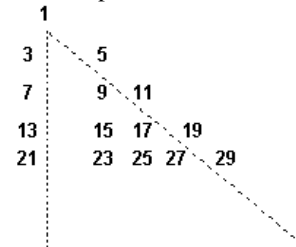
07) Considere uma esfera inscrita e tangente à base de um cone de revolução. Um cilindro está circunscrito à esfera de tal forma que uma de suas bases está apoiada na base do cone. Seja:

V_1 o volume do cone e V_2 o volume do cilindro. Encontre o menor valor da constante k para o qual $V_1 = k V_2$.

Sugestão: Considere o ângulo formado pelo diâmetro da base e a geratriz do cone em uma das extremidades deste diâmetro.

08) Determine o resto da divisão do polinômio $(\cos\phi + x\sin\phi)^n$ por (x^2+1) , onde n é um número natural.

09) Considere os números ímpares escritos sucessivamente, como mostra a figura abaixo, onde a n -ésima linha compreende n números. Encontre em função de n , nesta linha, a soma de todos os números escritos, bem como o primeiro e o último.



10) Em uma parábola (**P**), com foco F e parâmetro p , considere uma corda MM' normal à parábola em M. Sabendo que o ângulo $MF M' = 90^\circ$ calcule os segmentos FM e FM'