

IME Matemática 1998

01) Determine a solução da equação trigonométrica:
 $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 1, x \in \mathbf{R}$

02) Resolva e interprete, geometricamente, o sistema matricial abaixo, em função de α e β .

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & -6 & 7 \\ 6 & 8 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -8 \\ \beta \end{bmatrix}$$

03) Determine os valores de λ que satisfaçam à inequação,
 $27^{2\lambda} - \frac{4}{9} \cdot 27^\lambda + 27^{-1} > 0$, e represente, graficamente, a função,
 $y = 27^{2x} - \frac{4}{9} \cdot 27^x + 27^{-1}$.

04) Determine os parâmetros α, β, γ e δ da transformação complexa, $W = \frac{\alpha Z + \beta}{\gamma Z + \delta}$, que leva as pontos $Z = 0; -i; -1$ para $W = i; 1; 0$, respectivamente, bem como, Z para $W = -2 - i$, onde $i = \sqrt{-1}$.

05) Considere uma elipse e uma hipérbole centradas na origem, O, de um sistema cartesiano, com eixo focal coincidente com o eixo OX. Os focos da elipse são vértices da hipérbole e os focos da hipérbole são vértices da elipse.

Dados os eixos da elipse como 10cm e $20/3$ cm, determine as equações das parábolas, que passam pelas interseções da elipse e da hipérbole e são tangentes ao eixo OY na origem.

06) Uma embarcação deve ser tripulada por oito homens, dois dos quais só remam do lado direito e apenas um, do lado esquerdo.

Determine de quantos modos esta tripulação pode ser formada, se de cada lado deve haver quatro homens.

Observação: A ordem dos homens de cada lado distingue a tripulação.

07) Determine α, β , e γ de modo que o polinômio, $\alpha x^{\gamma+1} + \beta x^\gamma + 1$, racional inteiro em x, seja divisível por $(x-1)^2$ e que o valor numérico do quociente seja igual a 120 para $x = 1$.

08) Uma soma finita de números inteiros consecutivos, ímpares, positivos ou negativos, é igual a 7^3 . Determine os termos desta soma.

09) Considere o cubo de bases ABCD e EFGH, e arestas AE, BF, CG e DH. Sejam as arestas iguais a 3m e os pontos M, N e P marcados de forma que:

$M \in AD$, tal que $AM = 2m$

$N \in AB$, tal que $AN = 2m$, e

$P \in BF$, tal que $BP = 0,5m$.

Calcule o perímetro da seção que o plano MNP determina no cubo.

10) Quatro retas se interceptam formando quatro triângulos conforme figura abaixo.

Prove que os círculos circunscritos aos quatro triângulos possuem um ponto em comum.

