

IME Matemática 1999

01) Determine as raízes de $z^2 + 2iz + 2 - 4i = 0$, e localize-as no plano complexo.

02) Sejam as funções $g(x)$ e $h(x)$ assim definidas:

$$g(x) = 3x - 4, h(x) = f(g(x)) = 9x^2 - 6x + 1.$$

Determine a função $f(x)$ e faça seu gráfico.

03) Calcule o valor de $(1,02)^{-10}$, com dois algarismos significativos. Empregando a expansão do binômio de Newton.

04) Determine θ sabendo-se que:

$$-\frac{1 - \cos^4 \theta}{1 - \sin^4 \theta} \times \frac{1 + \operatorname{ctg}^2 \theta}{1 + \operatorname{tg}^2 \theta} = \frac{2}{3}$$

$$-0 < \theta \leq 2\pi$$

05) Determine α para que seja impossível o sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 3x - y + 5z = 2 \\ 4x + y + (\alpha^2 - 14)z = \alpha + 2 \end{cases}$$

06) Determine as possíveis progressões aritméticas para as quais a divisão da soma dos seus n primeiros termos pela soma dos seus $2n$ primeiros termos seja independente do valor de n .

07) Determine uma matriz não singular P que satisfaça a equação matricial $P^{-1} \cdot A = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$,

onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

08) Seja o polinômio $P(x)$ de grau $(2n+1)$ com todos os seus coeficientes positivos e unitários. Dividindo-se $P(x)$ por $D(x)$, de grau 3, obtém-se o resto $R(x)$. Determine $R(x)$ sabendo-se que as raízes de $D(x)$ são raízes de $A(x) = x^4 - 1$, e que $D(1) \neq 0$.

09) Uma piscina de base retangular tem, em metros, as seguintes dimensões: base 5×6 , e altura 3. Dois terços do volume da piscina são ocupados por água. Na superfície superior da água, forma-se uma pequena bolha de ar. A bolha de ar está equidistante das paredes de 5 metros de base. Em relação as paredes de 6 metros de base, sua posição é tal que a distância à uma das paredes é o dobro da distância à outra.

Estabeleça um sistema de coordenadas retangulares que tenha como origem um dos cantos inferiores da piscina e como um dos planos coordenados a parede de 6 metros mais próxima da

bolha. Em relação a este sistema, determine as coordenadas retangulares do ponto onde se encontra a bolha de ar.

10) ABCD é um quadrado de lado ℓ , conforme figura abaixo. Sabendo-se que K é a soma dos quadrados das distâncias de um ponto P do plano definido por ABCD aos vértices de ABCD, determine:

a) O valor mínimo de K e a posição na qual ocorres este mínimo;

b) O lugar geométrico do ponto P para $K = 4\ell^2$.

