

IME Matemática 2000

01) Calcule o determinante:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 7 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 9 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 13 \end{vmatrix}$$

02) Considere a, b e c números reais tais que $a < b < c$. Prove que a equação abaixo possui exatamente duas raízes, x_1 e x_2 , que satisfaçam a condição: $a < x_1 < b < x_2 < c$.

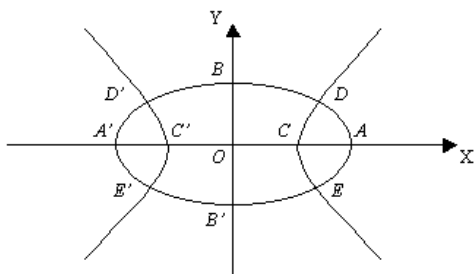
$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} = 0$$

03) Represente graficamente a função:

$$f(\theta) = \frac{1}{1 + \sin^2 \theta} + \frac{1}{1 + \cos^2 \theta} + \frac{1}{1 + \sec^2 \theta} + \frac{1}{1 + \operatorname{cosec}^2 \theta}$$

04) Calcule as coordenadas dos pontos de interseção da elipse com a hipérbole, representadas na figura abaixo, sabendo-se que:

- a) os pontos C e C' são os focos da elipse e os pontos A e A' são os focos da hipérbole;
- b) BB' é o eixo conjugado da hipérbole;
- c) $OB = OB' = 3\text{m}$ e $OC = OC' = 4\text{m}$.



05ª Questão – Determine o polinômio em n , com no máximo quatro termos, que representa o somatório dos

quadrados dos n primeiros números naturais $\left(\sum_{k=1}^n k^2 \right)$

06) Seja o conjunto: $D = \{(k_1, k_2) \mid 1 \leq k_1 \leq 13; 1 \leq k_2 \leq 4; k_1, k_2 \in \mathbf{N}\}$

Determine quantos subconjuntos

$L = \{(x_1, x_2); (y_1, y_2); (z_1, z_2); (t_1, t_2); (r_1, r_2)\}$, $L \subset D$

, existem com 5 (cinco) elementos distintos, que satisfazem simultaneamente as seguintes condições:

- a) $x_1 = y_1 = z_1$;
- b) $x_1 \neq t_1, x_1 \neq r_1, t_1 \neq r_1$.

07) As arestas laterais de uma pirâmide com n faces tem medida l . Determine:

a) A expressão do raio do círculo circunscrito à base, em função de l , de modo que o produto do volume da pirâmide pela sua altura seja máximo;

b) A expressão desse produto máximo, em função de l e n .

08) As medianas BE e CF de um triângulo ABC se cortam em G . Demonstre que

$tg \hat{BGC} = \frac{12S}{b^2 + c^2 - 5a^2}$, onde S é a área do triângulo ABC ; $AC = b$; $AB = c$; $BC = a$.

09) Três jogadores, cada um com um dado, fizeram lançamentos simultâneos. Essa operação foi repetida 50 vezes. Os dados contém três faces brancas e três faces pretas. Dessas 50 vezes

- a) em 28 saiu uma face preta para o jogador I;
 - b) em 25 saiu uma face branca para o jogador II;
 - c) em 27 saiu uma face branca para o jogador III;
 - d) em 8 saíram faces pretas para os jogadores I e III e branca para o jogador II;
 - e) em 7 saíram faces brancas para os jogadores II e III e preta para o jogador I;
 - f) em 4 saíram faces pretas para os três jogadores;
 - g) em 11 saíram faces pretas para os jogadores II e III.
- Determine quantas vezes saiu uma face preta para pelo menos um jogador.

10) Considere quatro números inteiros a, b, c e d . Prove que o produto: $(a-b)(c-a)(d-a)(d-c)(d-b)(c-b)$ é divisível por 12.