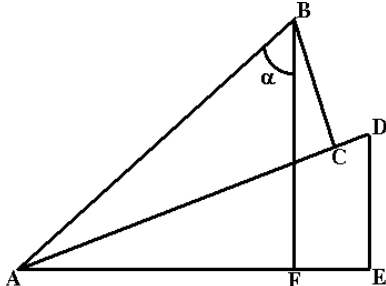


IME Matemático 2001

01) Considere a figura abaixo, onde $AB=AD=1$, $BC=x$, $AC=y$, $DE=z$ e $AE=w$. Os ângulos DEA , BCA e BFA são retos.

a) Determine o comprimento de AF e de BF em função de x , y , z e w .

b) Determine a tangente do ângulo α em função de x , y , z e w .



02) Considere o polinômio de grau mínimo, cuja representação gráfica passa pelos pontos $P_1(-2;-11)$, $P_2(-1;0)$, $P_3(1;4)$ e $P_4(2;9)$.

(A) Determine os coeficientes do polinômio.

(B) Calcule todas as raízes do polinômio.

03) Determine todos os números inteiros m e n para os quais o polinômio $2x^m + a^{3n}x^{m-3n} - a^m$ é divisível por $x + a$.

04) Sejam a e b números reais positivos e diferentes de 1.

Dado o sistema abaixo

$$\begin{cases} a^x \cdot b^{\frac{1}{y}} = \sqrt{ab} \\ 2 \cdot \log_a x = \log_{\frac{1}{b}} y \cdot \log_{\sqrt{a}} b \end{cases}$$

determine os valores de x e y .

05) Dois números complexos são ortogonais se suas representações gráficas forem perpendiculares entre si. Prove que dois números complexos Z_1 e Z_2 são ortogonais se e somente se:

$$Z_1 \overline{Z_2} + \overline{Z_1} Z_2 = 0.$$

Obs. \overline{Z} indica o conjugado de um número complexo Z .

06) Considere a matriz $A = (a_{k,j})$, onde: $a_{k,j}$ = k -ésimo termo do desenvolvimento de $(1 + j.i)^{54}$, com $k = 1, \dots, 55$; $j = 1, \dots, 55$ e $i = \sqrt{-1}$.

a) Calcule $a_{3;2} + a_{54;1}$

b) Determine o somatório dos elementos da coluna 55.

c) Obtenha uma fórmula geral para os elementos da diagonal principal.

07) Um comandante de companhia convocou voluntários para a constituição de 11 patrulhas. Todas elas são formadas pelo mesmo número de homens. Cada homem participa de exatamente de duas

patrulhas. Cada duas patrulhas têm somente um homem em comum. Determine o número de voluntários e o de integrantes de uma patrulha.

08) Calcule o valor exato de:

$$\sin[2\arccot(4/3)] + \cos[2\operatorname{arccosec}(5/4)]$$

09) Prove que para qualquer número inteiro k , os números k e k^5 terminam sempre com o mesmo algarismo (algarismo das unidades).

10) Sejam r , s e t retas paralelas não coplanares. São marcados sobre r dois pontos A e A' , sobre s os pontos B e B' , e sobre t os pontos C e C' de modo que os segmentos $AA' = a$, $BB' = b$ e $CC' = c$ tenham o mesmo sentido.

(A) Mostre que se G e G' são os baricentros dos triângulos ABC e $A'B'C'$, respectivamente, então GG' é paralelo às três retas.

(B) Determine GG' em função de a , b e c .