

IME Matemática 2002

01) Calcule a soma dos números entre 200 e 500 que são múltiplos de 6 ou de 14, mas não simultaneamente de ambos.

02) Uma matriz quadrada é denominada ortogonal quando a sua transposta é igual a sua inversa. Considerando esta definição, determine se a matriz $[R]$, abaixo, é uma matriz ortogonal, sabendo-se que n é um número inteiro e α é um ângulo qualquer. Justifique a sua resposta.

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos(n\alpha) & -\sin(n\alpha) & 0 \\ \sin(n\alpha) & \cos(n\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

03) Considere uma parábola de eixo focal OX que passe pelo ponto (0,0). Defini-se a subnormal em um ponto P da parábola como o segmento de reta ortogonal à tangente da curva, limitado pelo ponto P e o eixo focal. Determine a equação e identifique o lugar geométrico dos pontos médios das subnormais dessa parábola.

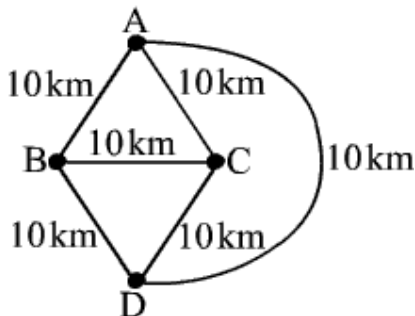
04) Sabe-se que $\log_a b = X$, $\log_a c = Y$ e $n > 0$, onde n é um número natural. Sendo c o produto dos n termos de uma progressão geométrica de primeiro termo a e razão q , calcule o valor de $\log_c b$, em função de X , Y e n .

05) a) Encontre as condições que devem satisfazer os coeficientes de um polinômio $P(x)$ de quarto grau para que $P(x) = P(1-x)$.

b) Considere o polinômio $P(x) = 14x^4 - 32x^3 - 56x^2 + 72x + 77$. Determine todas as suas raízes sabendo-se que o mesmo satisfaz à condição do item acima.

06) Um cone e um cilindro circulares retos têm uma base comum e o vértice do cone se encontra no centro da outra face do cilindro. Determine o ângulo formado pelo eixo do cone e sua geratriz, sabendo-se que a razão entre a área total do cilindro e a área total do cone é $7/4$.

07) Quatro cidades, A, B, C e D, são conectadas por estradas conforme a figura abaixo. Quantos percursos diferentes começam e terminam na cidade A, e possuem:



a) exatamente 50 km ?

b) $n \times 10$ km ?

08) (A) Sejam x , y e z números reais positivos. Prove

que: $\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{x \cdot y \cdot z}$. Em que condições essa

igualdade se verifica?

b) Considere um paralelepípedo de lados a , b , c e área total S_0 . Determine o volume máximo desse paralelepípedo em função de S_0 . Qual a relação entre a , b e c para que esse volume seja máximo?

09) Resolva a equação $\sqrt{5 - \sqrt{5 - x}} = x$, sabendo-se que $x > 0$.

10) Considere um quadrado XYZW de lado a . Dividindo-se cada ângulo desse quadrado em quatro partes iguais, obtém-se o octógono regular representado na figura abaixo. Determine o lado e a área desse octógono em função de a . As repostas finais não podem conter expressões trigonométricas.

