

01) Seja z um número complexo de módulo unitário que satisfaz a condição $z^{2n} \neq -1$, onde n é um número inteiro positivo.

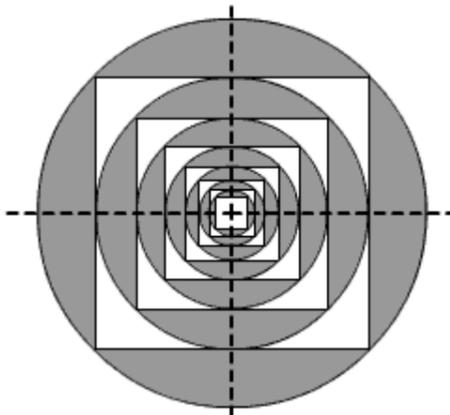
Demonstre que $\frac{z^n}{1+z^{2n}}$ é um número real.

02) Determine todos os valores de x que satisfazem a equação:

$$|\log(12x^3 - 19x^2 + 8x)| = \log(12x^3 - 19x^2 + 8x),$$

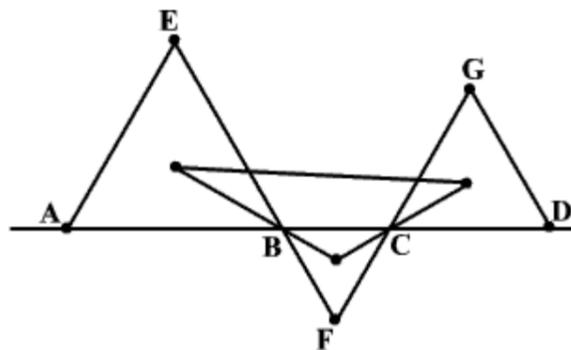
onde $\log(y)$ e $|y|$ representam, respectivamente, o logaritmo na base 10 e o módulo de y .

03) Dada numa circunferência de raio R , inscreve-se nela um quadrado. A seguir, inscreve-se uma circunferência neste quadrado. Este processo se repete indefinidamente para o interior da figura de maneira que cada quadrado estará sempre inscrito em uma circunferência e simultaneamente circunscrito por outra. Calcule, em função de R , a soma das áreas delimitadas pelos lados dos quadrados e pelas circunferências que os circunscrevem, conforme mostra a figura.



04) Resolva a equação $\operatorname{tg}(a) + \operatorname{tg}(2a) = 2\operatorname{tg}(3a)$, sabendo-se que $a \in [0, \pi/2)$.

05) Sobre uma reta r são marcados os pontos A, B, C e D . São construídos os triângulos equiláteros ABE, BCF e CDG , de forma que os pontos E e G encontram-se do mesmo lado da reta r , enquanto que o ponto F encontra-se do lado oposto, conforme mostra a figura. Calcule a área do triângulo formado pelos baricentros de ABE, BCF e CDG , em função dos comprimentos dos segmentos AB, BC e CD .



06) Considere um hexágono regular de 6 cm de lado. Determine o valor máximo da área de um triângulo XYZ , sabendo-se que:

- a) os pontos X, Y e Z estão situados sobre lados do hexágono;
- b) a reta que une os pontos X e Y é paralela a um dos lados do hexágono.

07) Sejam A e B dois subconjuntos de \mathbb{N} . Por definição, uma função $f: A \rightarrow B$ é crescente se $a_1 > a_2 \Rightarrow f(a_1) \geq f(a_2)$, para quaisquer a_1 e $a_2 \in A$.

a) Para $A = \{1, 2\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$, quantas funções de A para B são crescentes?

b) Para $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2, \dots, n\}$, quantas funções de A para B são crescentes, onde n é um número inteiro maior que zero?

08) Seja uma pirâmide regular de vértice V e base quadrangular $ABCD$. O lado da base da pirâmide mede l e a aresta lateral $\sqrt{2}l$. Corta-se a essa pirâmide por um plano que contém o vértice A , é paralelo à reta BD , e contém o ponto médio da aresta VC . Calcule a área da seção determinada pela interseção do plano com a pirâmide.

09) Demonstre que $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$ é um número inteiro múltiplo de quatro.

10) Considere uma matriz $A, n \times n$, de coeficientes reais, e k um número real diferente de 1. Sabendo-se que $A^3 = kA$, prove que a matriz $A+I$ é invertível, onde I é a matriz identidade $n \times n$.