

Probabilidade

Distribuição Binomial



Distribuição Binomial

(Experimentos de Bernoulli)

- Considere as seguintes experimentos/situações práticas:
 - Conformidade de itens saindo da linha de produção
 - Tiros na mosca numa sequência de disparos contra um alvo
 - Respostas de pessoas à pergunta sobre se vai ou não viajar nas próximas férias

○ que estes experimentos têm em comum ?



Distribuição Binomial (Experimentos de Bernoulli)

- Em todas estas situações temos um conjunto de provas que satisfazem as seguintes condições:
 - **as provas se realizam sob as mesmas condições**
 - **cada prova comporta apenas dois resultados possíveis (mutuamente exclusivos), designados por S (sucesso) e F (falha).**
 - **a probabilidade de sucesso $P(S)$ é a mesma em cada prova**
 - (a variável aleatória de interesse, X , representa o número de sucessos em cada prova)
 - **as provas são independentes entre si**



Distribuição Binomial

- Suponha que 4 componentes são testados por um período de tempo, e que só dois resultados são possíveis: sucesso ou falha.
- De quantos modos podemos ter 4 sucessos em cada prova?
 - **$X=4$ (variável aleatória de interesse)**
 - Maneiras de se obter $X=4$ sucessos
 - $S_1 S_2 S_3 S_4 \rightarrow$ uma única maneira



Distribuição Binomial

- Suponha que 4 componentes são testados por um período de tempo, e que só dois resultados são possíveis: sucesso ou falha
- De quantos modos podemos ter 3 sucessos em cada prova ?
 - $X=3$ (variável aleatória de interesse)
 - 4 Maneiras de se obter $X=3$ sucessos

<u>S1</u>	<u>S2</u>	<u>S3</u>	F4
<u>S1</u>	<u>S2</u>	F3	<u>S4</u>
<u>S1</u>	F2	<u>S3</u>	<u>S4</u>
F1	<u>S2</u>	<u>S3</u>	<u>S4</u>

Distribuição Binomial

- Suponha que 4 componentes são testados por um período de tempo, e que só dois resultados são possíveis: sucesso ou falha
- De quantos modos podemos ter X sucessos em cada prova?

	X=4	X=3	X=2	X=1	X=0
S1 S2 S3 S4		S1 S2 S3 F4 S1 S2 F3 S4 S1 F2 S3 S4 F1 S2 S3 S4	S1 S2 F3 F4 S1 F2 S3 F4 F1 S2 S3 F4 F1 S2 F3 S4 S1 F2 F3 S4 F1 F2 S3 S4	F1 F2 F3 S4 F1 F2 S3 F4 F1 S2 F3 F4 S1 F2 F3 F4	F1 F2 F3 F4

Distribuição Binomial

Se a probabilidade de *sucesso* é p , qual a probabilidade de se ter “ $X = 0$ ” e “ $X = 1$ ” sucessos em uma prova?

(Note que $q = 1-p$ é a probabilidade de *falha*)

<u>Sucessos</u>	<u>Modos</u>	<u>No. de modos</u>	<u>Probabilidade</u>
$X = 0$	F1 F2 F3 F4	1	$1 p^0 (1-p)^4$
$X = 1$	F1 F2 F3 S4 F1 F2 S3 F4 F1 S2 F3 F4 S1 F2 F3 F4	4	$4 p^1 (1-p)^3$



Distribuição Binomial

Se a probabilidade de *sucesso* é p , qual a probabilidade de se ter “ $X = 2$ ” sucessos em uma prova?

(Note que $q=1-p$ é a probabilidade de *falha*)

<u>Sucessos</u>	<u>Modos</u>	<u>No. de modos</u>	<u>Probabilidade</u>
$X = 2$	S1 S2 F3 F4 S1 F2 S3 F4 F1 S2 S3 F4 F1 S2 F3 S4 S1 F2 F3 S4 F1 F2 S3 S4	6	$6 p^2 (1-p)^2$



Distribuição Binomial

Se a probabilidade de *sucesso* é p , qual a probabilidade de se ter X sucessos em uma prova?

(Note que $q=1-p$ é a probabilidade de *falha*)

<u>Sucessos</u>	<u>No. de modos</u>	<u>Probabilidade</u>
$X = 0$	1	$1 p^0 (1-p)^4$
$X = 1$	4	$4 p^1 (1-p)^3$
$X = 2$	6	$6 p^2 (1-p)^2$
$X = 3$	4	$4 p^3 (1-p)^1$
$X = 4$	1	$1 p^4 (1-p)^0$

Distribuição Binomial: definição

Se a probabilidade de *sucesso* é p , qual a probabilidade de se ter X sucessos em uma prova?

○ Note que:

- $q=1-p$: é a probabilidade de *falha*
- n : *número de repetições do experimento*
- X (*maiúsculo*): *variável aleatória*
- x (*minúsculo*): *valor da variável aleatória*

$$P(X=x) = \binom{n}{x} p^x (q)^{n-x} \quad P(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$P(X=x) = \frac{n!}{(n-x)!x!} p^x (1-p)^{n-x}$$



Exercício

- Um sistema de segurança consiste em 4 alarmes (idênticos) de pressão alta, com probabilidade de sucesso $p = 0,8$ (cada um).
- Qual a probabilidade de se ter exatamente 3 alarmes soando quando a pressão atingir o valor limite ?



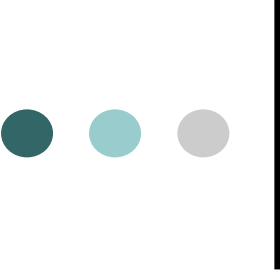
Exercício: solução

Um sistema de segurança consiste em 4 alarmes (idênticos) de pressão alta, com probabilidade de sucesso $p = 0,8$ (cada um).

Qual a probabilidade de se ter exatamente 3 alarmes soando quando a pressão atingir o valor limite ?

S1 S2 S3 F4	$0,8 \times 0,8 \times 0,8 \times 0,2$	$= 0,1024$
S1 S2 F3 S4	$0,8 \times 0,8 \times 0,2 \times 0,8$	$= 0,1024$
S1 F2 S3 S4	$0,8 \times 0,2 \times 0,8 \times 0,8$	$= 0,1024$
F1 S2 S3 S4	$0,2 \times 0,8 \times 0,8 \times 0,8$	$= 0,1024$

$$P(3) = 4 \times (0,8)^3 \times (1 - 0,8)^1 = 0,4096$$



Distribuição Binomial: Parâmetros

A distribuição binomial tem os parâmetros:

média : $\mu = n \cdot p$

desvio padrão : $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$



Exemplo

- **Um sistema de segurança de uma casa possui 03 alarmes, todos com probabilidade de funcionar no momento certo de 0,8.**
- **Qual o número médio de alarmes que deverão soar no caso de uma invasão detectada?**



Exemplo

- Um sistema de segurança de uma casa possui 03 alarmes, todos com probabilidade de funcionar no momento certo de 0,8.
- Qual o número médio de alarmes que deverão soar no caso de uma invasão detectada?

$$\mu = 3 \times 0,8 = 2,4 \text{ alarmes}$$

$$\sigma = (3 \times 0,8 \times 0,2)^{1/2} = 0,7 \text{ alarmes}$$



Exemplo

- E se, agora, o sistema de segurança tivesse 4 alarmes e tivesse que atuar com pelo menos 3 dos 4 alarmes (idênticos).
- Qual a probabilidade de se ter pelo menos 3 em 4 alarmes soando quando houver uma invasão?



Exemplo

E se, agora, o sistema de segurança tivesse 4 alarmes e tivesse que atuar com peelo menos 3 dos 4 alarmes (idênticos).

Qual a probabilidade de se ter peelo menos 3 em 4 alarmes soando quando houver uma invasão?

S1 S2 S3 F4	0,8 x 0,8 x 0,8 x 0,2	=	0,1024
S1 S2 F3 S4	0,8 x 0,8 x 0,2 x 0,8	=	0,1024
S1 F2 S3 S4	0,8 x 0,2 x 0,8 x 0,8	=	0,1024
F1 S2 S3 S4	0,2 x 0,8 x 0,8 x 0,8	=	0,1024
S1 S2 S3 S4	0,8 x 0,8 x 0,8 x 0,8	=	0,4096

$$P(3) + P(4) = \{4 \times (0,8)^3 \times (1 - 0,8)^1\} + \{1 \times (0,8)^4 \times (1 - 0,8)^0\} = 0,8192$$



Resumindo

- Podemos calcular as probabilidades de ocorrências em experimentos binomiais utilizando a distribuição binomial.
- Para tal, o experimento deve ser binomial, seguindo os 4 seguintes critérios:
 - Deve comportar um número fixo de provas (n)
 - As provas devem ser independentes – eventos independentes
 - Cada prova pode ter apenas dois resultados possíveis (sucesso ' p ' e insucesso ' q ')
 - As probabilidades permanecem constantes para cada prova.



Notação para Distribuição Binomial

- S e F (Sucesso ou falha): os dois resultados possíveis
- p e q: probabilidades de S e F, respectivamente
 - $P(S) = p$; $P(F) = q$
- n: número fixo de provas
- x: número específico de sucessos em n provas, podendo ser qualquer inteiro entre 0 e n
- $P(x)$: probabilidade de se obter exatamente 'n' sucessos em cada prova.



Experimentos Binomiais

- Exemplo de Experimentos Binomiais
 - Teste de produtos com reposição
 - Testes de produto sem reposição onde o tamanho da amostra é muito pequena em relação ao tamanho da população (até 5%)
 - Pesquisas de satisfação



Exemplo

- Dado que 10% das pessoas são canhotas, qual a probabilidade de obtermos exatamente 3 estudantes canhotos numa turma com 15 estudantes.
 - Verifique se é um experimento binomial e identifique n , x , p e q .
 - Número fixo de provas
 - Independência: Sim. O fato de uma pessoa ser canhota ou destra não afeta a probabilidade do outro ser canhoto ou destro.
 - Duas categorias de resultados: canhota ou destro
 - Probabilidades constantes: a probabilidade de 0,1 canhoto permanece constante para cada um dos 15 estudantes
 - $n=15$ provas; $x=3$; $p=0,1$ e $q=0,9$

Tabela de Distribuição Binomial

		<i>p</i>										
<i>n</i>	<i>x</i>	0.1	0.2	0.25	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.75	0.8	0.9
1	0	0.900	0.800	0.750	0.700	0.600	0.500	0.400	0.300	0.250	0.200	0.100
	1	0.100	0.200	0.250	0.300	0.400	0.500	0.600	0.700	0.750	0.800	0.900
2	0	0.810	0.640	0.563	0.490	0.360	0.250	0.160	0.090	0.063	0.040	0.010
	1	0.180	0.320	0.375	0.420	0.480	0.500	0.480	0.420	0.375	0.320	0.180
	2	0.010	0.040	0.063	0.090	0.160	0.250	0.360	0.490	0.563	0.640	0.810
3	0	0.729	0.512	0.422	0.343	0.216	0.125	0.064	0.027	0.016	0.008	0.001
	1	0.243	0.384	0.422	0.441	0.432	0.375	0.288	0.189	0.141	0.096	0.027
	2	0.027	0.096	0.141	0.189	0.288	0.375	0.432	0.441	0.422	0.384	0.243
	3	0.001	0.008	0.016	0.027	0.064	0.125	0.216	0.343	0.422	0.512	0.729
4	0	0.656	0.410	0.316	0.240	0.130	0.063	0.026	0.008	0.004	0.002	0.000
	1	0.292	0.410	0.422	0.412	0.346	0.250	0.154	0.076	0.047	0.026	0.004
	2	0.049	0.154	0.211	0.265	0.346	0.375	0.346	0.265	0.211	0.154	0.049
	3	0.004	0.026	0.047	0.076	0.154	0.250	0.346	0.412	0.422	0.410	0.292
	4	0.000	0.002	0.004	0.008	0.026	0.063	0.130	0.240	0.316	0.410	0.656



Exemplo

- Aplicando a fórmula para calcular a probabilidade:

- Obs.: arredonde apenas o resultado final

$$P(3) = \frac{15!}{(15-3)! \cdot 3!} 0,1^3 \cdot 0,9^{(15-3)} = 0,129$$

- Aplicando as tabelas de probabilidades binomiais, calcule a probabilidade de ao menos 3 serem canhotos.
 - $P(\text{ao menos } 3) = P(3) + P(4) + P(5) + \dots + P(15) = 1 - P(0) - P(1) - P(2)$
 - $P(\text{ao menos } 3) = 1 - 0,206 - 0,343 - 0,267 = 0,184$



Exemplo

- Uma empresa aérea possui 20% de todas as linhas domésticas. Supondo que todos os vôos domésticos deste país tenham a mesma chance de um acidente, escolhendo 7 acidentes aleatoriamente, qual o número médio de acidentes com esta empresa e o desvio padrão:
 - $n=7$; $p=0,20$; $q=0,8$
 - $\mu=n.p = 7.0,2 = 1,4$ acidentes em média serão com esta empresa de 7 escolhidos aleatoriamente
 - $\sigma = \sqrt{n.p.q} = \sqrt{0,12} = 1,1 \rightarrow$ Desvio padrão de número de acidentes com esta empresa em 7 escolhidos aleatoriamente



Exemplo

- O método Ericsson de seleção de sexo tem uma taxa admitida de 75% de sucesso. Suponha que 100 casais utilizem este método, com o resultado de que, dentre 100 recém-nascidos, há 75 meninas.
 - A) se o método não produz efeito, e então meninos e meninas são igualmente prováveis, determine a média e o desvio padrão do número de meninas em um grupo de 100 crianças.
 - $\mu = n.p = 100.0,5 = 50$ meninas em média
 - $\sigma = \sqrt{n.p.q} = \sqrt{100.0,5.0,5} = 5 \rightarrow$ desvio padrão de meninas
 - B) Considere o método como eficaz
 - $\mu = n.p = 100.0,75 = 75$ meninas em média
 - $\sigma = \sqrt{n.p.q} = \sqrt{100.0,75.0,25} = 4,33 \rightarrow$ desvio padrão de meninas
 - Podemos considerar o método como eficaz? Por quê?