# Probabilidade e Estatística

## Trabalhando com Pequenas Amostras: Distribuição *t* de Student

# Pequenas amostras x Grandes amostras

- Nos exemplos tratados até agora:
  - amostras grandes (n>30)
  - qualquer tipo de distribuição original da variável aleatória possui distribuição das médias “adequadamente aproximadas” a uma distribuição normal.
    - Teorema Central do Limite
- Tempo e custo impõem limites ao tamanho da amostra
- Utilização da distribuição normal inadequada para amostras pequenas

# Estimativa da média para pequenas amostras

- Para casos onde n ≤ 30 e:
  - População original tem distribuição normal; e
  - O valor de σ é conhecido, podemos calcular E com:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- Nos casos onde n ≤ 30 e:
  - População original tem distribuição normal; e
  - O valor de σ é desconhecido, devemos calcular E com a **Distribuição '*t*' de Student.**

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s / \sqrt{n}}$$

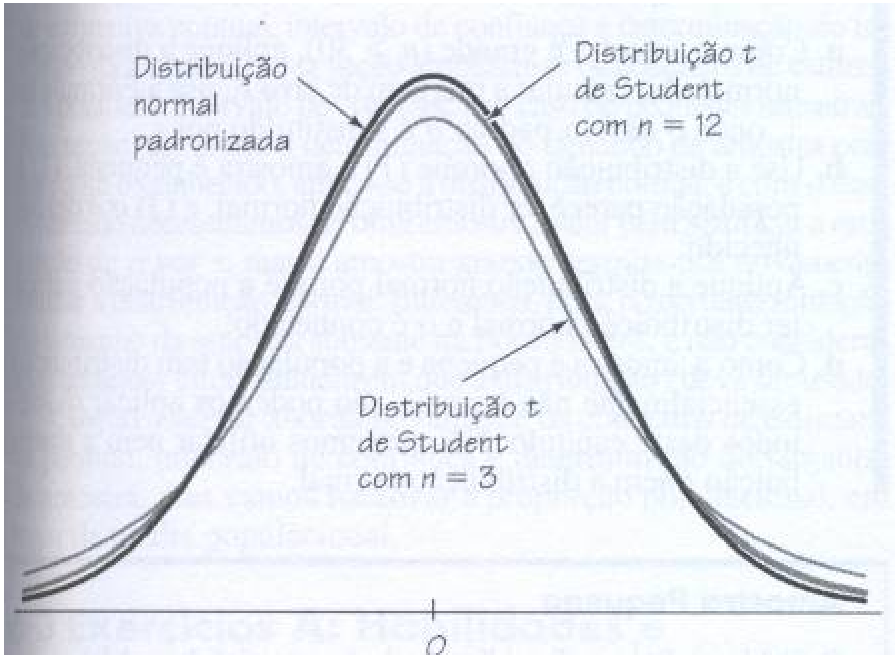
# Distribuição ‘t’ de Student

- Criada por William Gosset (1876-1937)
  - Análises com pequenas amostras
- Empregado da Cervejaria Guinness
- Cervejaria não permitia publicação de pesquisas
  - Pseudônimo de *Student*

# Distribuição ‘t’ de Student

- A **Distribuição ‘t’ de Student** é essencialmente uma distribuição normal (com forma aproximada de um sino) para todas as amostras de tamanho ‘n’.
- Através dela, determinamos os valores críticos $t_{\alpha/2}$ do intervalo de confiança onde

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}}$$



# Utilização da Tabela

- Obtemos o valor de $t_{\alpha/2}$ na Tabela A3 localizando o número de graus de liberdade na coluna à esquerda e percorrendo a linha correspondente até atingir o número diretamente abaixo do valor aplicável (bilateral) de $\alpha$.
- Grau de liberdade: para um conjunto de dados correspondente ao número de valores que podem variar após terem sido impostas certas restrições a todos os valores.
  - Ex: 10 estudantes obtêm em um teste média 8,0
  - A soma das 10 notas deve ser 80. Portanto, se temos um grau de liberdade de 10-1=9, as nove primeiras notas podem ser escolhidas aleatoriamente, contudo a 10ª deve ser igual a [80-(soma das 9 primeiras)].
- Aplicaremos em nosso curso graus de liberdade = n-1

# Propriedades da Distribuição t de Student

- É diferente conforme o tamanho da amostra (n)
- Tem forma geral simétrica, mas reflete a maior variabilidade esperada em pequenas amostras
- Tem média t=0
- O desvio padrão varia com o tamanho da amostra, mas é superior a 1
- Quanto maior ‘n’, maior a aproximação em relação à distribuição normal. Para n>30 podemos utilizar distribuição normal com valores críticos ‘z’.
- Condições de utilização
  - Tamanho da amostra pequeno ($n \leq 30$)
  - $\sigma$ desconhecido
  - População original tem distribuição essencialmente normal

# Assim, para...

- Amostras com as condições anteriores:

$$\boxed{E = t_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}}$$

Onde $t_{\alpha/2}$ tem n-1 graus de liberdade

- Intervalo de confiança

$$\boxed{\overline{x} - E < \mu < \overline{x} + E}$$

ou

$$\boxed{\mu = \overline{x} \pm E}$$

$$\boxed{(\overline{x} - E; \overline{x} + E)}$$

# Observações finais

- Para aplicarmos t de Student, a distribuição da população original deve ser essencialmente normal.
- Contudo, pode-se obter bons resultados se:
  - For basicamente simétrica;
  - Possuir uma única moda.
- Aplicamos t de Student no lugar da distribuição normal, pois quando não se conhece $\sigma$, a utilização de 's' de uma pequena amostra incorpora outra fonte de erro. Para mantermos o grau de confiança desejado, compensamos a variabilidade adicional ampliando o intervalo de confiança por um processo que substitui o valor crítico $z_{\alpha/2}$ por outro $t_{\alpha/2}$ obtido na tabela da Distribuição t de Student.

# Exemplo

- Considere um teste de colisão de carros.  A análise de 12 carros danificados resulta num custo de conserto que parece ter distribuição em forma de sino, com média e desvio-padrão a seguir (R$).

$$\bar{x} = 26.227$$

$$s = 15.873$$

- Determine:
  - a melhor estimativa pontual de $\mu$ (custo do conserto)
  - O intervalo de confiança para NC=95%

# Exemplo

Obs.: valores em R$

a) $\bar{x} = 26.227$

b) Amostra pequena (n≤30); desvio padrão desconhecido; distribuição é similar à distribuição normal

Na tabela: para a coluna 0,05 bilateral e grau de liberdade n-1=11 → $t_{\alpha/2}$=2,201

$$E = t_{\alpha/2}.\frac{s}{\sqrt{n}} = 2{,}201.\frac{15873}{\sqrt{12}} = 10.085{,}29$$

$$\bar{x} - E < \mu < \bar{x} + E$$

$$26.227 - 10.085{,}29 < \mu < 26.227 + 10.085{,}29$$

$$16.141{,}71 < \mu < 36.312{,}29$$

$$\mu = 26.227 \pm 10.085{,}29$$

Existe uma probabilidade de 95% do intervalo de confiança conter efetivamente a média da população: custos de reparo

# Síntese da Estimativa de Média Populacional