

Probabilidade e Estatística



**“TESTES DE HIPÓTESES”
(ou Testes de Significância)**

Estimação e Teste de Hipóteses

Estimação e teste de hipóteses (ou significância) são os aspectos principais da Inferência Estatística

ESTIMAÇÃO

Estimar um parâmetro qualquer da população

TESTE DE HIPÓTESES

Decidir se determinada afirmação sobre um parâmetro populacional é, ou não, apoiada pela evidência obtida de dados amostrais

Teste de Hipóteses

Em estatística, uma hipótese é uma alegação, ou afirmação, sobre uma característica de uma população

- Pesquisadores médicos afirmam que a temperatura média do corpo humano não é igual a 37 °C
- Um novo fertilizante utilizado no cultivo de hortaliças aumenta a produtividade

Teste de Hipóteses



A dificuldade nestes casos (e daí a necessidade de métodos estatísticos) é que a característica de interesse varia em cada amostra

- A temperatura média do corpo humano varia de pessoa para pessoa
- A produtividade varia de planta para planta

Raciocínio Estatístico



DIRETRIZ GERAL

“Analisar uma amostra para distinguir entre resultados que podem ocorrer facilmente e os que dificilmente ocorrerem”

Exemplo Prático

A empresa ProCare lançou o produto Escolha-o-Sexo. De acordo com a propaganda, o produto permitiria que os casais aumentassem em 87% a chance de terem um filho, e em 80% a chance de terem uma filha.

Suponha que se faz um experimento com 100 casais que querem ter menina, e que todos eles sigam as instruções da embalagem do respectivo produto.

Utilizando apenas o bom senso, o que se poderia concluir sobre a eficácia do Escolha-o-Sexo se das 100 crianças:

- a) 52 são meninas ?
- b) 96 são meninas ?

Teste de Hipóteses



PONTO CRUCIAL

A diferença entre o valor alegado de um parâmetro populacional e o valor de uma estatística amostral pode ser razoavelmente atribuído à variabilidade amostral

OU

A discrepância é demasiado grande para ser encarada assim

Estudo de Caso

(temperatura do corpo humano)

Estudos prévios indicam que a temperatura do corpo humano é $98,60^{\circ}\text{F}$. Pesquisadores médicos de Maryland coletaram dados amostrais com $\bar{x} = 98,20^{\circ}\text{F}$ e distribuição aproximadamente normal.

Estes dados amostrais constituem evidência suficiente para rejeitar a crença comum de que $\mu = 98,6^{\circ}\text{F}$???

Estudo de Caso

(temperatura do corpo humano)



O primeiro passo consiste em formular duas hipóteses sobre a afirmação.

As hipóteses são explicações potenciais que procuram levar em conta fatos observados em situações onde existem algumas incógnitas.

A incógnita em nosso caso é a verdadeira temperatura do corpo humano.

Hipótese Nula e Alternativa

A hipótese nula H_0 é uma afirmação que diz que o parâmetro populacional é tal como especificado (isto é, a afirmação é correta).

$$H_0: \mu = 98,6$$

A hipótese alternativa H_1 é uma afirmação que oferece uma alternativa à alegação (isto é, o parâmetro é maior/menor/diferente que o valor alegado).

$$H_1: \mu \neq 98,6$$

Hipótese Nula e Alternativa



A hipótese nula H_0 representa o *status quo*, ou seja, a circunstância que está sendo testada, e o objetivo dos testes de hipóteses é sempre tentar rejeitar a hipótese nula.

A hipótese alternativa H_1 representa o que se deseja provar ou estabelecer, sendo formulada para contradizer a hipótese nula.

Hipótese Nula e Alternativa

Teste Bilateral:

$H_0 : \mu = \text{valor numérico}$

$H_1 : \mu \neq \text{valor numérico}$

Teste Unilateral Superior:

$H_0 : \mu = \text{valor numérico}$

$H_1 : \mu > \text{valor numérico}$

Teste Unilateral Inferior:

$H_0 : \mu = \text{valor numérico}$

$H_1 : \mu < \text{valor numérico}$

Tipos de Erro

Repare que, ao testarmos uma hipótese nula, chegamos a uma conclusão:

rejeitá-la, ou não rejeitá-la

Entretanto, devemos lembrar que tais conclusões ora são corretas, ora são incorretas (mesmo quando fazemos tudo corretamente!).

Este é o preço a ser pago por estarmos trabalhando em uma situação onde a variabilidade é inerente !!!

Tipos de Erro

| | | O Verdadeiro Estado da Natureza | |
|---------|-------------------------------------|--|--|
| | | A hipótese nula é verdadeira. | A hipótese nula é falsa. |
| Decisão | Decidimos rejeitar a hipótese nula. | Erro tipo I (rejeição de uma hipótese nula verdadeira) | Decisão correta |
| | Não rejeitamos a hipótese nula. | Decisão correta | Erro tipo II (Não rejeição de uma hipótese nula falsa) |

Exemplo

A eficácia de certa vacina após um ano é de 25% (isto é, o efeito imunológico se prolonga por mais de um ano em apenas 25% das pessoas que a tomam). Desenvolve-se uma nova vacina, mais cara, e deseja-se saber se esta é, de fato, melhor.

Sendo “ p ” a proporção de imunizados por mais de um ano com a nova vacina...

- *Quais hipóteses devem ser formuladas?*
- *Que erros poderemos cometer?*

Exemplo

Hipótese nula: $H_0: p = 0,25$

Hipótese alternativa: $H_1: p > 0,25$

Erro tipo I : *aprovar a vacina quando, na realidade, ela não tem nenhum efeito superior ao da vacina em uso.*

Erro tipo II : *rejeitar a nova vacina quando ela é, de fato, melhor que a vacina em uso.*

Nível de Significância

- A probabilidade de se cometer um erro tipo I depende dos valores dos parâmetros da população e é designada por α (nível de significância).
- Dizemos, então, que o nível de significância α de um teste é a probabilidade máxima com que desejamos correr o risco de um erro do tipo I.
- O valor de α é tipicamente predeterminado; são comuns as escolhas $\alpha = 0,05$ e $\alpha = 0,01$.
- A probabilidade de se cometer um erro do tipo II é designada por β .

Exemplo Ilustrativo



- Nosso interesse em detectar desvios não aleatórios (significativos) de determinado parâmetro pode envolver desvios em ambas as direções ou apenas numa direção.
- Assim, em sucessivas jogadas de uma moeda, esta pode ser considerada não-equilibrada se aparece um número muito grande, ou muito pequeno, de caras.

Exemplo Ilustrativo

- A hipótese nula estabelece a situação “normal”, isto é, a moeda é equilibrada.

- $H_0: p = 0,50$

- A hipótese alternativa seria simplesmente “a moeda não é equilibrada”, e investigaríamos então desvios em ambas as direções.

- $H_1: p \neq 0,50$

- Entretanto, se estivéssemos apostando, digamos, em caras, então nossa preocupação seria somente com um número pequeno de caras. A hipótese alternativa seria “aparecem muito poucas caras”.

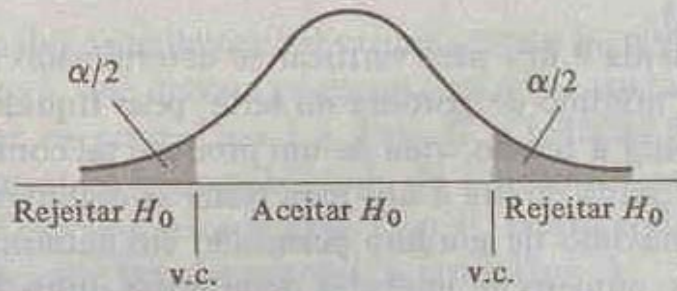
- $H_1: p < 0,50$

Exemplo Ilustrativo

- Essencialmente, a hipótese alternativa é usada para indicar qual o aspecto da variação não-aleatória que nos interessa.

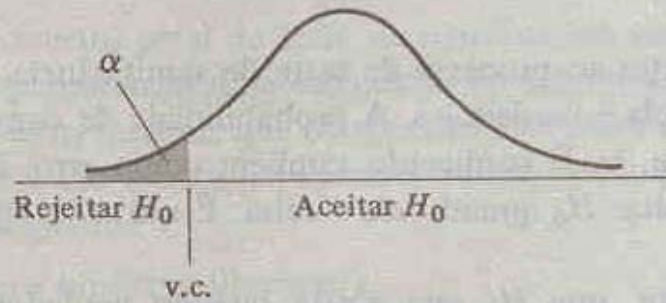
$$H_0: p = 0,50$$

- $H_1: p \neq 0,50$ (ambas as direções: muito OU muito pouco)
- $H_1: p < 0,50$ (desvio abaixo: muito pouco)
- $H_1: p > 0,50$ (desvio acima: muito)



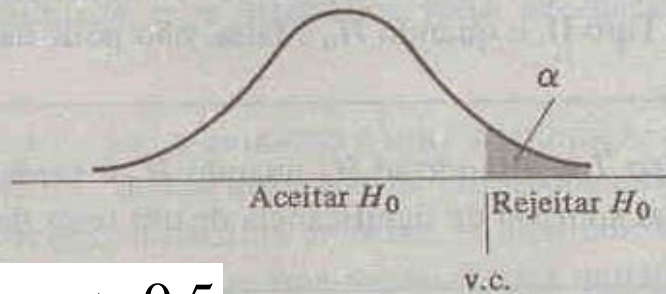
BILATERAL

$$H_1 : p \neq 0,5$$



UNILATERAL

$$H_1 : p < 0,5$$



UNILATERAL

$$H_1 : p > 0,5$$

RESUMO

O processo geral consiste nos seguintes passos:

1. Formular as hipóteses nula e alternativa;
2. Escolher a distribuição amostral adequada;
3. Escolher um nível de significância α com base na gravidade do erro tipo 1 ;
4. Calcular a estatística de teste, os valores críticos e a região crítica (esboçar um gráfico é SEMPRE uma boa opção)
5. Comparar a estatística de teste com os valores críticos:
 - Rejeitar a hipótese nula se a estatística de teste excede o(s) valor(es) crítico(s), ou seja, está na região crítica
 - Não rejeitar a hipótese nula, caso contrário.

Exemplo

- Uma máquina automática enche pacotes de café segundo uma distribuição normal com média μ e desvio-padrão 20g
- A máquina foi regulada para $\mu = 500\text{g}$
- De meia em meia hora tiramos uma amostra de 16 pacotes para verificar se o empacotamento está sob controle, isto é, se $\mu = 500\text{g}$

Se uma dessas amostras apresentasse $\bar{x} = 492\text{g}$,
você pararia ou não o empacotamento para verificar
se o ajuste da máquina *está correto* ?

Exemplo

Passo 1: Indicamos por X o peso de cada pacote, então X é uma normal com média μ e $\sigma = 20$. As hipóteses que nos interessam são:

Hipótese nula: $H_0: \mu = 500 \text{ g}$

Hipótese alternativa: $H_1: \mu \neq 500 \text{ g}$ **BILATERAL!**

pois a máquina pode desregular para mais ou para menos

Exemplo

Passo 2: Escolher a distribuição amostral

- *Se o desvio padrão populacional é conhecido:*

Distribuição NORMAL (Caso deste exemplo típico)

- *Se o desvio é desconhecido E a amostra é pequena ($n < 30$):*

Distribuição de STUDENT

Exemplo



Passo 3: Escolher o nível de significância

- *Pela situação descrita no problema, podemos fazer $\alpha = 0,01$*

Exemplo

Passo 4: Calcular a estatística de teste, valores e região crítica

estatística de teste = $\frac{\text{média amostral} - \text{média alegada}}{\text{desvio padrão da distribuição amostral}}$

$$z_{teste} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \quad \text{ou} \quad t_{teste} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}$$

Exemplo

Passo 4: *Calcular a estatística de teste, valores e região crítica*

estatística de teste = $\frac{\text{proporção amostral} - \text{proporção alegada}}{\text{desvio padrão da distribuição amostral}}$

$$z_{\text{teste}} = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$$

n = número de provas

p = proporção populacional (hipótese nula)

q = 1 - p

$\hat{p} = \frac{\bar{x}}{n}$ (*proporção amostral*)

Exemplo

Passo 4: Calcular a estatística de teste, valores e região crítica

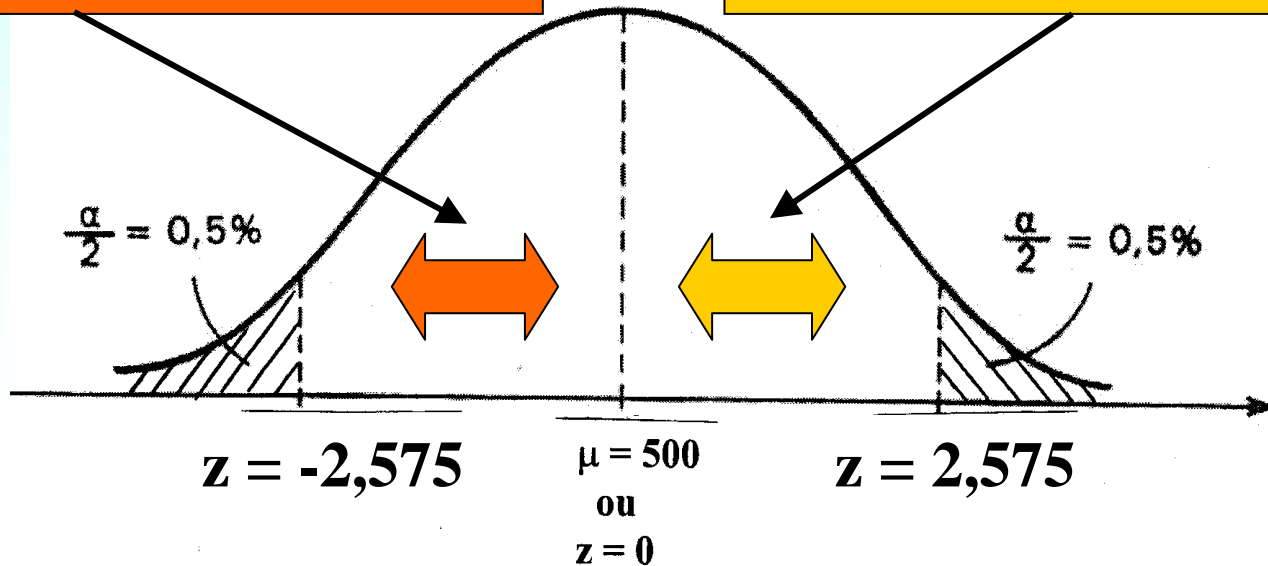
$$z = \frac{x - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{492 - 500}{20 / \sqrt{16}} = \frac{-8}{5} = -1,6$$

Exemplo

Passo 4: Calcular a estatística de teste, valores e região crítica

$$\text{Área} = 0,5 - 0,005 = 0,495$$

$$\text{Área} = 0,5 - 0,005 = 0,495$$



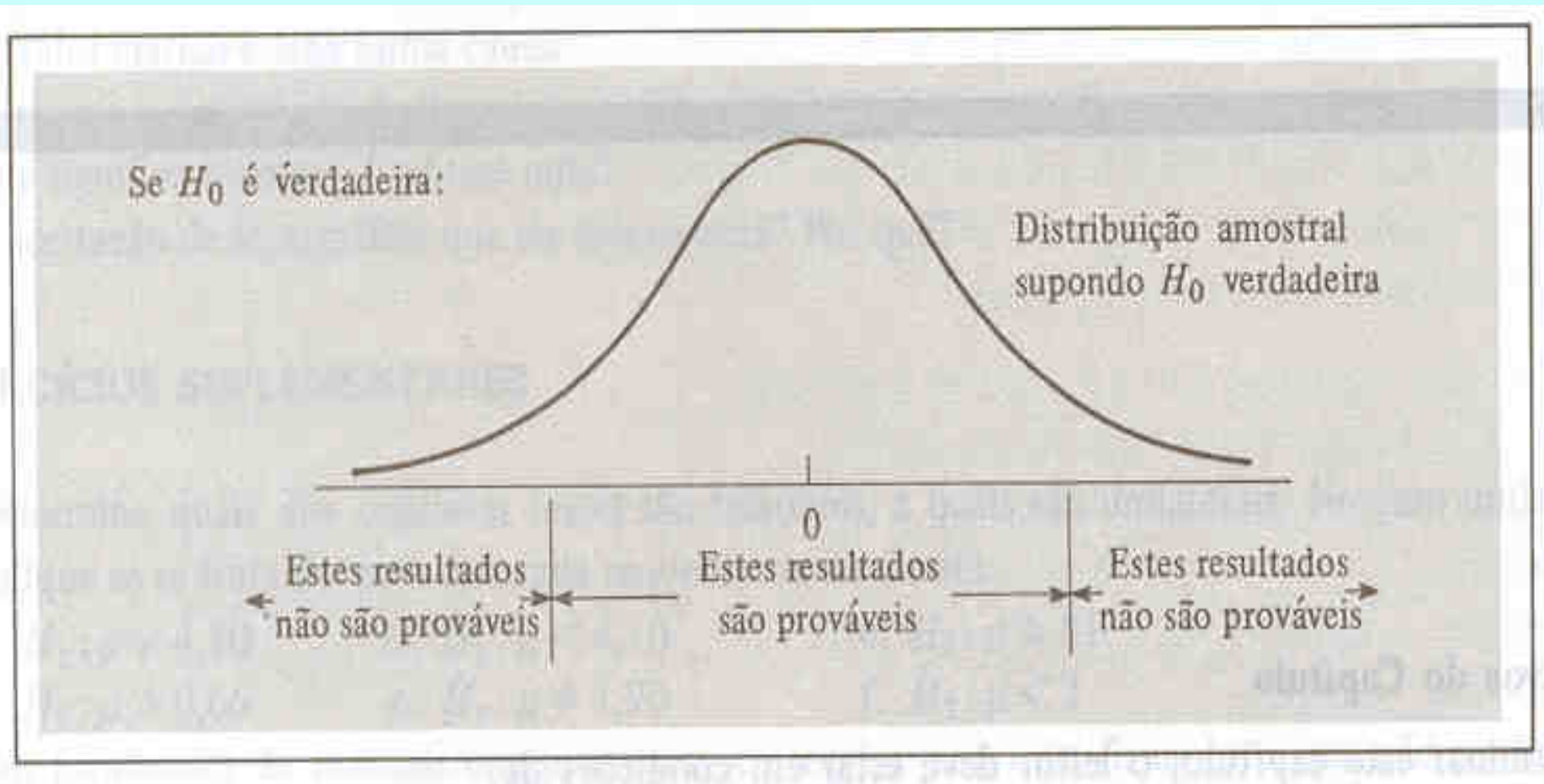
Exemplo

*Passo 5: A informação da amostra é que $x = 492$ g
(o que fornece $z = -1,6$)*

*Como $x \notin$ Região Crítica, nossa conclusão será
não rejeitar H_0*

A discrepância da média da amostra para a média proposta por H_0 pode ser considerada como devido apenas ao sorteio aleatório dos pacotes

RESUMO: Passo 5



RESUMO: Passo 5

