Probabilidade

Distribuição Binomial

Distribuição Binomial
(Experimentos de Bernoulli)

- Considere as seguintes experimentos/situações práticas:
  - **Conformidade de itens saindo da linha de produção**
  - **Tiros na mosca numa sequência de disparos contra um alvo**
  - **Respostas de pessoas à pergunta sobre se vai ou não viajar nas próximas férias**

O que estes experimentos têm em comum ?

Distribuição Binomial (Experimentos de Bernoulli)

- Em todas estas situações temos um conjunto de provas que satisfazem as seguintes condições:
  - **as provas se realizam sob as mesmas condições**
  - **cada prova comporta apenas dois resultados possíveis (mutuamente exclusivos), designados por S (sucesso) e F (falha).**
  - **a probabilidade de sucesso P(S) é a mesma em cada prova**
    - **(a variável aleatória de interesse, X, representa o número de sucessos em cada prova)**
  - **as provas são independentes entre si**

Distribuição Binomial

- Suponha que 4 componentes são testados por um período de tempo, e que só dois resultados são possíveis: sucesso ou falha.
- De quantos modos podemos ter 4 sucessos em cada prova?
  - **X=4 (X: variável aleatória de interesse)**
  - Maneiras de se obter X=4 sucessos
    - S1 S2 S3 S4 → uma única maneira

Distribuição Binomial

- Suponha que 4 componentes são testados por um período de tempo, e que só dois resultados são possíveis: sucesso ou falha
- De quantos modos podemos ter 3 sucessos em cada prova ?
  - X=3 (X: variável aleatória de interesse)
  - 4 Maneiras de se obter X=3 sucessos

S1 S2 S3 **F4**
S1 S2 **F3** S4
S1 **F2** S3 S4
F1 S2 S3 S4

Distribuição Binomial

- Suponha que 4 componentes são testados por um período de tempo, e que só dois resultados são possíveis: sucesso ou falha
- De quantos modos podemos ter X sucessos em cada prova?

X=4	X=3	X=2	X=1	X=0
S1 S2 S3 S4	S1 S2 S3 F4 S1 S2 F3 S4 S1 F2 S3 S4 F1 S2 S3 S4	S1 S2 F3 F4 S1 F2 S3 F4 F1 S2 S3 F4 F1 S2 F3 S4 S1 F2 F3 S4 F1 F2 S3 S4	F1 F2 F3 S4 F1 F2 S3 F4 F1 S2 F3 F4 S1 F2 F3 F4	F1 F2 F3 F4

Distribuição Binomial

Se a probabilidade de *sucesso* é *p*, qual a probabilidade de se ter “X = 0” e “X = 1” sucessos em uma prova?

(Note que *q = 1-p* é a probabilidade de *falha*)

Sucessos	Modos	No. de modos	Probabilidade
X = 0	F1 F2 F3 F4	1	$1\ p^0\ (1-p)^4$
X = 1	F1 F2 F3 S4 F1 F2 S3 F4 F1 S2 F3 F4 S1 F2 F3 F4	4	$4\ p^1\ (1-p)^3$

Distribuição Binomial

Se a probabilidade de *sucesso* é *p*, qual a probabilidade de se ter "X = 2" sucessos em uma prova?

(Note que *q=1-p* é a probabilidade de *falha*)

Sucessos	Modos	No. de modos	Probabilidade
X = 2	S1 S2 F3 F4 S1 F2 S3 F4 F1 S2 S3 F4 F1 S2 F3 S4 S1 F2 F3 S4 F1 F2 S3 S4	6	$6\ p^2\ (1-p)^2$

Distribuição Binomial

Se a probabilidade de *sucesso* é *p*, qual a probabilidade de se ter X sucessos em uma prova?

(Note que $q=1-p$ é a probabilidade de *falha*)

Sucessos	No. de modos	Probabilidade
$X = 0$	1	$1\,p^0\,(1-p)^4$
$X = 1$	4	$4\,p^1\,(1-p)^3$
$X = 2$	6	$6\,p^2\,(1-p)^2$
$X = 3$	4	$4\,p^3\,(1-p)^1$
$X = 4$	1	$1\,p^4\,(1-p)^0$

Distribuição Binomial: definição

Se a probabilidade de *sucesso* é *p*, qual a probabilidade de se ter X sucessos em uma prova?

- **Note que:**
  - ***q=1-p:*** **é a probabilidade de *falha***
  - ***n: número de repetições do experimento***
  - ***X (maiúsculo): variável aleatória***
  - ***x (minúsculo): <u>valor</u> que a variável aleatória assume***

$$P(X=x) = \binom{n}{x} p^x (q)^{n-x} \qquad P(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$\boxed{P(X=x) = \frac{n!}{(n-x)!x!} p^x (1-p)^{n-x}}$$

Exercício

- Um sistema de segurança consiste em 4 alarmes (idênticos) de pressão alta, com probabilidade de sucesso p = 0,8 (cada um).
- Qual a probabilidade de se ter exatamente 3 alarmes soando quando a pressão atingir o valor limite ?

Exercício: solução

Um sistema de segurança consiste em 4 alarmes (idênticos) de pressão alta, com probabilidade de sucesso p = 0,8 (cada um).

Qual a probabilidade de se ter <u>exatamente</u> 3 alarmes soando quando a pressão atingir o valor limite ?

S1 S2 S3 F4	**0,8 x 0,8 x 0,8 x 0,2**	**=**	**0,1024**
S1 S2 F3 S4	**0,8 x 0,8 x 0,2 x 0,8**	**=**	**0,1024**
S1 F2 S3 S4	**0,8 x 0,2 x 0,8 x 0,8**	**=**	**0,1024**
F1 S2 S3 S4	**0,2 x 0,8 x 0,8 x 0,8**	**=**	**0,1024**

$$P(3) = 4 \times (0{,}8)^3 \times (1 - 0{,}8)^1 = 0{,}4096$$

Distribuição Binomial: Parâmetros

A distribuição binomial tem os parâmetros:

$$média: \quad \mu = n \cdot p$$

$$desvio\ padrão: \quad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$$

Exemplo

- **Um sistema de segurança de uma casa possui 03 alarmes, todos com probabilidade de funcionar no momento certo de 0,8.**
- **Qual o número médio de alarmes que deverão soar no caso de uma invasão detectada?**

Exemplo

- **Um sistema de segurança de uma casa possui 03 alarmes, todos com probabilidade de funcionar no momento certo de 0,8.**
- **Qual o número médio de alarmes que deverão soar no caso de uma invasão detectada?**

$$\mu = 3 \times 0{,}8 = 2{,}4 \text{ alarmes}$$

$$\sigma = (3 \times 0{,}8 \times 0{,}2)^{1/2} = 0{,}7 \text{ alarmes}$$

Exemplo

- E se, agora, o sistema de segurança tivesse 4 alarmes e tivesse que atuar com pelo menos 3 dos 4 alarmes (idênticos).
- Qual a probabilidade de se ter pelo menos 3 em 4 alarmes soando quando houver uma invasão?

Exemplo

E se, agora, o sistema de segurança tivesse 4 alarmes e tivesse que atuar com pelo menos 3 dos 4 alarmes (idênticos).

Qual a probabilidade de se ter pelo menos 3 em 4 alarmes soando quando houver uma invasão?

S1 S2 S3 F4	0,8 x 0,8 x 0,8 x 0,2	=	0,1024
S1 S2 F3 S4	0,8 x 0,8 x 0,2 x 0,8	=	0,1024
S1 F2 S3 S4	0,8 x 0,2 x 0,8 x 0,8	=	0,1024
F1 S2 S3 S4	0,2 x 0,8 x 0,8 x 0,8	=	0,1024
S1 S2 S3 S4	0,8 x 0,8 x 0,8 x 0,8	=	0,4096

$$P(3) + P(4) =$$

$$\{4 \times (0,8)^3 \times (1 - 0,8)^1\} + \{1 \times (0,8)^4 \times (1 - 0,8)^0\} = 0,8192$$

Resumindo

- Podemos calcular as probabilidades de ocorrências em experimentos binomiais utilizando a distribuição binomial.
- Para tal, o experimento deve ser binomial, seguindo os 4 seguintes critérios:
  - Deve comportar um número fixo de provas (n)
  - As provas devem ser independentes: eventos independentes
  - Cada prova pode ter apenas dois resultados possíveis (sucesso ´p´ e insucesso ´q´)
  - As probabilidades permanecem constantes para cada prova.

Notação para Distribuição Binomial

- S e F (Sucesso ou falha): os dois resultados possíveis
- p e q: probabilidades de S e F, respectivamente
  - P(S) = p; P(F) = q
- n: número fixo de provas
- x: número específico de sucessos em n provas, podendo ser qualquer inteiro entre 0 e n
- P(x): probabilidade de se obter exatamente ´n´ sucessos em cada prova.

Experimentos Binomiais

- Exemplo de Experimentos Binomiais
  - Teste de produtos com reposição
  - Testes de produto sem reposição onde o tamanho da amostra é muito pequena em relação ao tamanho da população (até 5%)
  - Pesquisas de satisfação

Exemplo

- Dado que 10% das pessoas são canhotas, qual a probabilidade de obtermos exatamente 3 estudantes canhotos numa turma com 15 estudantes.
  - Verifique se é um experimento binomial e identifique n, x, p e q.
    - Número fixo de provas
    - Independência: Sim. O fato de uma pessoa ser canhota ou destra não afeta a probabilidade do outro ser canhoto ou destro.
    - Duas categorias de resultados: canhota ou destro
    - Probabilidades constantes: a probabilidade de 0,1 canhoto permanece constante para cada um dos 15 estudantes
  - $n=15$ provas; $x=3$; $p=0,1$ e $q=0,9$

Tabela de Distribuição Binomial

		p										
n	*x*	*0.1*	*0.2*	*0.25*	*0.3*	*0.4*	*0.5*	*0.6*	*0.7*	*0.75*	*0.8*	*0.9*
1	*0*	0.900	0.800	0.750	0.700	0.600	0.500	0.400	0.300	0.250	0.200	0.100
	1	0.100	0.200	0.250	0.300	0.400	0.500	0.600	0.700	0.750	0.800	0.900
2	*0*	0.810	0.640	0.563	0.490	0.360	0.250	0.160	0.090	0.063	0.040	0.010
	1	0.180	0.320	0.375	0.420	0.480	0.500	0.480	0.420	0.375	0.320	0.180
	2	0.010	0.040	0.063	0.090	0.160	0.250	0.360	0.490	0.563	0.640	0.810
3	*0*	0.729	0.512	0.422	0.343	0.216	0.125	0.064	0.027	0.016	0.008	0.001
	1	0.243	0.384	0.422	0.441	0.432	0.375	0.288	0.189	0.141	0.096	0.027
	2	0.027	0.096	0.141	0.189	0.288	0.375	0.432	0.441	0.422	0.384	0.243
	3	0.001	0.008	0.016	0.027	0.064	0.125	0.216	0.343	0.422	0.512	0.729
4	*0*	0.656	0.410	0.316	0.240	0.130	0.063	0.026	0.008	0.004	0.002	0.000
	1	0.292	0.410	0.422	0.412	0.346	0.250	0.154	0.076	0.047	0.026	0.004
	2	0.049	0.154	0.211	0.265	0.346	0.375	0.346	0.265	0.211	0.154	0.049
	3	0.004	0.026	0.047	0.076	0.154	0.250	0.346	0.412	0.422	0.410	0.292
	4	0.000	0.002	0.004	0.008	0.026	0.063	0.130	0.240	0.316	0.410	0.656

Exemplo

- Aplicando a fórmula para calcular a probabilidade:
  - Obs.: arredonde apenas o resultado final

$$P(3) = \frac{15!}{(15-3)!\cdot 3!} 0{,}1^3 \cdot 0{,}9^{(15-3)} = 0{,}129$$

- Aplicando as tabelas de probabilidades binomiais, calcule a probabilidade de ao menos 3 serem canhotos.
  - P(ao menos 3) = P(3)+P(4)+P(5)+...P(15) = 1-P(0)-P(1)-P(2)
  - P(ao menos 3) = 1- 0,206 - 0,343 – 0,267 = 0,184

Exemplo

- Uma empresa aérea possui 20% de todas as linhas domésticas. Supondo que todos os vôos domésticos deste país tenham a mesma chance de um acidente, escolhendo 7 acidentes aleatoriamente, qual o número médio de acidentes com esta empresa e o desvio padrão.

Exemplo

- Uma empresa aérea possui 20% de todas as linhas domésticas. Supondo que todos os vôos domésticos deste país tenham a mesma chance de um acidente, escolhendo 7 acidentes aleatoriamente, qual o número médio de acidentes com esta empresa e o desvio padrão:
  - n=7; p=0,20; q=0,8
  - μ=n.p = 7.0,2 = 1,4 acidentes em média serão com esta empresa de 7 escolhidos aleatoriamente
  - $\sigma = \sqrt{n.p.q} = \sqrt{0{,}12} = 1{,}1$ → Desvio padrão de número de acidentes com esta empresa em 7 escolhidos aleatoriamente

Exemplo

- O método Ericsson de seleção de sexo tem uma taxa admitida de 75% de sucesso. Suponha que 100 casais utilizem este método, com o resultado de que, dentre 100 recém-nascidos, há 75 meninas.
  - A) Se o método não produz efeito, e então meninos e meninas são igualmente prováveis, determine a média e o desvio padrão do número de meninas em um grupo de 100 crianças.
  - B) Considere o método como eficaz e recalcule.
  - C) Podemos considerar o método como eficaz? Por quê?

Exemplo

- O método Ericsson de seleção de sexo tem uma taxa admitida de 75% de sucesso. Suponha que 100 casais utilizem este método, com o resultado de que, dentre 100 recém-nascidos, há 75 meninas.
  - A) se o método não produz efeito, e então meninos e meninas são igualmente prováveis, determine a média e o desvio padrão do número de meninas em um grupo de 100 crianças.
    - μ=n.p = 100.0,5 = 50 meninas em média
    - $\sigma = \sqrt{n.p.q} = \sqrt{100.0,5.0,5} = 5$ → desvio padrão de meninas
  - B) Considere o método como eficaz e recalcule.
    - μ=n.p = 100.0,75 = 75 meninas em média
    - $\sigma = \sqrt{n.p.q} = \sqrt{100.0,75.0,25} = 4,33$ → desvio padrão de meninas
  - Podemos considerar o método como eficaz? Por quê?