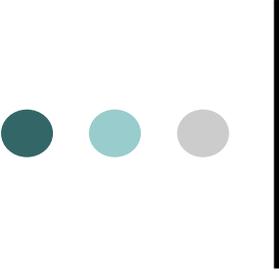


Probabilidade

Distribuição Binomial

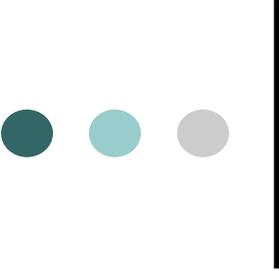


Distribuição Binomial

(Experimentos de Bernoulli)

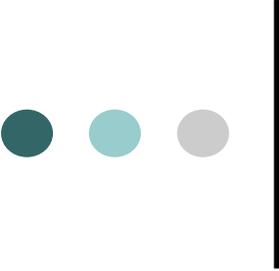
- Considere as seguintes experimentos/situações práticas:
 - Conformidade de itens saindo da linha de produção
 - Tiros na mosca numa sequência de disparos contra um alvo
 - Respostas de pessoas à pergunta sobre se vai ou não viajar nas próximas férias

○ que estes experimentos têm em comum ?



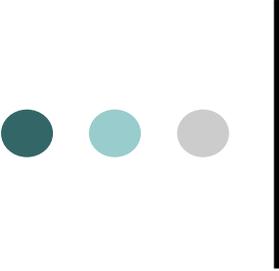
Distribuição Binomial (Experimentos de Bernoulli)

- Em todas estas situações temos um conjunto de provas que satisfazem as seguintes condições:
 - **as provas se realizam sob as mesmas condições**
 - **cada prova comporta apenas dois resultados possíveis (mutuamente exclusivos), designados por S (sucesso) e F (falha).**
 - **a probabilidade de sucesso $P(S)$ é a mesma em cada prova**
 - (a variável aleatória de interesse, X , representa o número de sucessos em cada prova)
 - **as provas são independentes entre si**



Distribuição Binomial

- Suponha que 4 componentes são testados por um período de tempo, e que só dois resultados são possíveis: sucesso ou falha.
- De quantos modos podemos ter 4 sucessos em cada prova?
 - **$X=4$ (X : variável aleatória de interesse)**
 - Maneiras de se obter $X=4$ sucessos
 - $S_1 S_2 S_3 S_4 \rightarrow$ uma única maneira



Distribuição Binomial

- Suponha que 4 componentes são testados por um período de tempo, e que só dois resultados são possíveis: sucesso ou falha
- De quantos modos podemos ter 3 sucessos em cada prova ?
 - $X=3$ (X : variável aleatória de interesse)
 - 4 Maneiras de se obter $X=3$ sucessos

| | | | |
|-----------|-----------|-----------|-----------|
| <u>S1</u> | <u>S2</u> | <u>S3</u> | F4 |
| <u>S1</u> | <u>S2</u> | F3 | <u>S4</u> |
| <u>S1</u> | F2 | <u>S3</u> | <u>S4</u> |
| F1 | <u>S2</u> | <u>S3</u> | <u>S4</u> |

Distribuição Binomial

- Suponha que 4 componentes são testados por um período de tempo, e que só dois resultados são possíveis: sucesso ou falha
- De quantos modos podemos ter X sucessos em cada prova?

| $X=4$ | $X=3$ | $X=2$ | $X=1$ | $X=0$ |
|-------------|--|--|--|---|
| S1 S2 S3 S4 | S1 S2 S3 F4 S1 S2 F3 S4 S1 F2 S3 S4 F1 S2 S3 S4 | S1 S2 F3 F4 S1 F2 S3 F4 F1 S2 S3 F4 F1 S2 F3 S4 S1 F2 F3 S4 F1 F2 S3 S4 | F1 F2 F3 S4 F1 F2 S3 F4 F1 S2 F3 F4 S1 F2 F3 F4 | F1 F2 F3 F4 |

Distribuição Binomial

Se a probabilidade de *sucesso* é p , qual a probabilidade de se ter “ $X = 0$ ” e “ $X = 1$ ” sucessos em uma prova?

(Note que $q = 1-p$ é a probabilidade de *falha*)

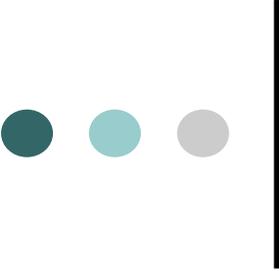
| <u>Sucessos</u> | <u>Modos</u> | <u>No. de modos</u> | <u>Probabilidade</u> |
|-----------------|--|---------------------|----------------------|
| $X = 0$ | F1 F2 F3 F4 | 1 | $1 p^0 (1-p)^4$ |
| $X = 1$ | F1 F2 F3 S4 F1 F2 S3 F4 F1 S2 F3 F4 S1 F2 F3 F4 | 4 | $4 p^1 (1-p)^3$ |

Distribuição Binomial

Se a probabilidade de *sucesso* é p , qual a probabilidade de se ter “ $X = 2$ ” sucessos em uma prova?

(Note que $q=1-p$ é a probabilidade de *falha*)

| <u>Sucessos</u> | <u>Modos</u> | <u>No. de modos</u> | <u>Probabilidade</u> |
|-----------------|--|---------------------|----------------------|
| $X = 2$ | S1 S2 F3 F4 S1 F2 S3 F4 F1 S2 S3 F4 F1 S2 F3 S4 S1 F2 F3 S4 F1 F2 S3 S4 | 6 | $6 p^2 (1-p)^2$ |



Distribuição Binomial

Se a probabilidade de *sucesso* é p , qual a probabilidade de se ter X sucessos em uma prova?

(Note que $q=1-p$ é a probabilidade de *falha*)

| <u>Sucessos</u> | <u>No. de modos</u> | <u>Probabilidade</u> |
|-----------------|---------------------|----------------------|
| $X = 0$ | 1 | $1 p^0 (1-p)^4$ |
| $X = 1$ | 4 | $4 p^1 (1-p)^3$ |
| $X = 2$ | 6 | $6 p^2 (1-p)^2$ |
| $X = 3$ | 4 | $4 p^3 (1-p)^1$ |
| $X = 4$ | 1 | $1 p^4 (1-p)^0$ |

Distribuição Binomial: definição

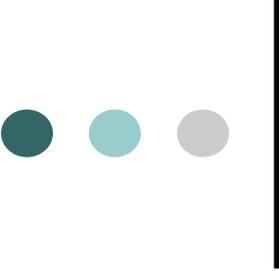
Se a probabilidade de *sucesso* é p , qual a probabilidade de se ter X sucessos em uma prova?

o Note que:

- $q=1-p$: é a probabilidade de *falha*
- n : *número de repetições do experimento*
- X (*maiúsculo*): *variável aleatória*
- x (*minúsculo*): valor que a *variável aleatória assume*

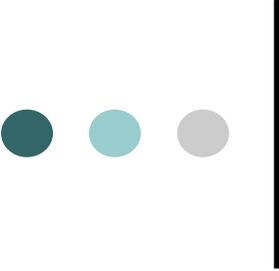
$$P(X=x) = \binom{n}{x} p^x (q)^{n-x} \quad P(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$P(X=x) = \frac{n!}{(n-x)!x!} p^x (1-p)^{n-x}$$



Exercício

- Um sistema de segurança consiste em 4 alarmes (idênticos) de pressão alta, com probabilidade de sucesso $p = 0,8$ (cada um).
- Qual a probabilidade de se ter exatamente 3 alarmes soando quando a pressão atingir o valor limite ?



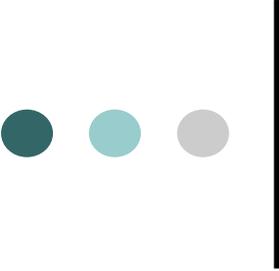
Exercício: solução

Um sistema de segurança consiste em 4 alarmes (idênticos) de pressão alta, com probabilidade de sucesso $p = 0,8$ (cada um).

Qual a probabilidade de se ter exatamente 3 alarmes soando quando a pressão atingir o valor limite ?

| | | |
|--------------------|--|------------|
| S1 S2 S3 F4 | $0,8 \times 0,8 \times 0,8 \times 0,2$ | $= 0,1024$ |
| S1 S2 F3 S4 | $0,8 \times 0,8 \times 0,2 \times 0,8$ | $= 0,1024$ |
| S1 F2 S3 S4 | $0,8 \times 0,2 \times 0,8 \times 0,8$ | $= 0,1024$ |
| F1 S2 S3 S4 | $0,2 \times 0,8 \times 0,8 \times 0,8$ | $= 0,1024$ |

$$P(3) = 4 \times (0,8)^3 \times (1 - 0,8)^1 = 0,4096$$

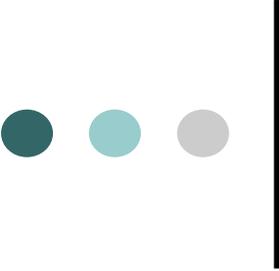


Distribuição Binomial: Parâmetros

A distribuição binomial tem os parâmetros:

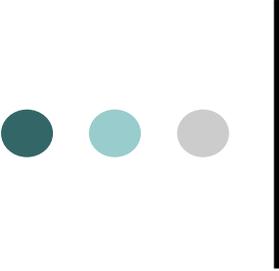
média : $\mu = n \cdot p$

desvio padrão : $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$



Exemplo

- **Um sistema de segurança de uma casa possui 03 alarmes, todos com probabilidade de funcionar no momento certo de 0,8.**
- **Qual o número médio de alarmes que deverão soar no caso de uma invasão detectada?**

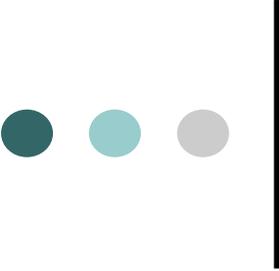


Exemplo

- Um sistema de segurança de uma casa possui 03 alarmes, todos com probabilidade de funcionar no momento certo de 0,8.
- Qual o número médio de alarmes que deverão soar no caso de uma invasão detectada?

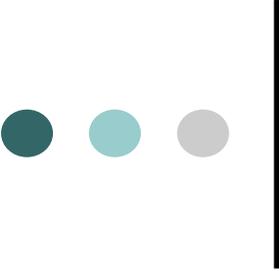
$$\mu = 3 \times 0,8 = 2,4 \text{ alarmes}$$

$$\sigma = (3 \times 0,8 \times 0,2)^{1/2} = 0,7 \text{ alarmes}$$



Exemplo

- E se, agora, o sistema de segurança tivesse 4 alarmes e tivesse que atuar com pelo menos 3 dos 4 alarmes (idênticos).
- Qual a probabilidade de se ter pelo menos 3 em 4 alarmes soando quando houver uma invasão?



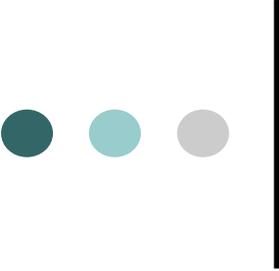
Exemplo

E se, agora, o sistema de segurança tivesse 4 alarmes e tivesse que atuar com peelo menos 3 dos 4 alarmes (idênticos).

Qual a probabilidade de se ter peelo menos 3 em 4 alarmes soando quando houver uma invasão?

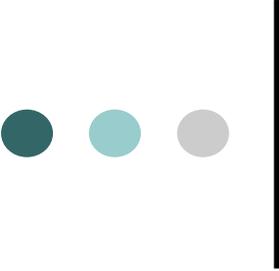
| | | | |
|--------------------|-----------------------|---|--------|
| S1 S2 S3 F4 | 0,8 x 0,8 x 0,8 x 0,2 | = | 0,1024 |
| S1 S2 F3 S4 | 0,8 x 0,8 x 0,2 x 0,8 | = | 0,1024 |
| S1 F2 S3 S4 | 0,8 x 0,2 x 0,8 x 0,8 | = | 0,1024 |
| F1 S2 S3 S4 | 0,2 x 0,8 x 0,8 x 0,8 | = | 0,1024 |
| S1 S2 S3 S4 | 0,8 x 0,8 x 0,8 x 0,8 | = | 0,4096 |

$$P(3) + P(4) = \{4 \times (0,8)^3 \times (1 - 0,8)^1\} + \{1 \times (0,8)^4 \times (1 - 0,8)^0\} = 0,8192$$



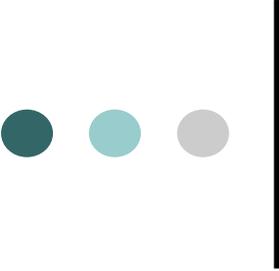
Resumindo

- Podemos calcular as probabilidades de ocorrências em experimentos binomiais utilizando a distribuição binomial.
- Para tal, o experimento deve ser binomial, seguindo os 4 seguintes critérios:
 - Deve comportar um número fixo de provas (n)
 - As provas devem ser independentes: eventos independentes
 - Cada prova pode ter apenas dois resultados possíveis (sucesso ' p ' e insucesso ' q ')
 - As probabilidades permanecem constantes para cada prova.



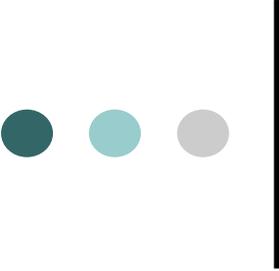
Notação para Distribuição Binomial

- S e F (Sucesso ou falha): os dois resultados possíveis
- p e q: probabilidades de S e F, respectivamente
 - $P(S) = p$; $P(F) = q$
- n: número fixo de provas
- x: número específico de sucessos em n provas, podendo ser qualquer inteiro entre 0 e n
- $P(x)$: probabilidade de se obter exatamente 'n' sucessos em cada prova.



Experimentos Binomiais

- Exemplo de Experimentos Binomiais
 - Teste de produtos com reposição
 - Testes de produto sem reposição onde o tamanho da amostra é muito pequena em relação ao tamanho da população (até 5%)
 - Pesquisas de satisfação

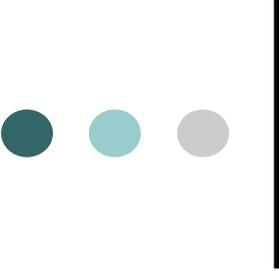


Exemplo

- Dado que 10% das pessoas são canhotas, qual a probabilidade de obtermos exatamente 3 estudantes canhotos numa turma com 15 estudantes.
 - Verifique se é um experimento binomial e identifique n , x , p e q .
 - Número fixo de provas
 - Independência: Sim. O fato de uma pessoa ser canhota ou destra não afeta a probabilidade do outro ser canhoto ou destro.
 - Duas categorias de resultados: canhota ou destro
 - Probabilidades constantes: a probabilidade de 0,1 canhoto permanece constante para cada um dos 15 estudantes
 - $n=15$ provas; $x=3$; $p=0,1$ e $q=0,9$

Tabela de Distribuição Binomial

| | | <i>p</i> | | | | | | | | | | |
|----------|----------|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| <i>n</i> | <i>x</i> | 0.1 | 0.2 | 0.25 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.75 | 0.8 | 0.9 |
| 1 | 0 | 0.900 | 0.800 | 0.750 | 0.700 | 0.600 | 0.500 | 0.400 | 0.300 | 0.250 | 0.200 | 0.100 |
| | 1 | 0.100 | 0.200 | 0.250 | 0.300 | 0.400 | 0.500 | 0.600 | 0.700 | 0.750 | 0.800 | 0.900 |
| 2 | 0 | 0.810 | 0.640 | 0.563 | 0.490 | 0.360 | 0.250 | 0.160 | 0.090 | 0.063 | 0.040 | 0.010 |
| | 1 | 0.180 | 0.320 | 0.375 | 0.420 | 0.480 | 0.500 | 0.480 | 0.420 | 0.375 | 0.320 | 0.180 |
| | 2 | 0.010 | 0.040 | 0.063 | 0.090 | 0.160 | 0.250 | 0.360 | 0.490 | 0.563 | 0.640 | 0.810 |
| 3 | 0 | 0.729 | 0.512 | 0.422 | 0.343 | 0.216 | 0.125 | 0.064 | 0.027 | 0.016 | 0.008 | 0.001 |
| | 1 | 0.243 | 0.384 | 0.422 | 0.441 | 0.432 | 0.375 | 0.288 | 0.189 | 0.141 | 0.096 | 0.027 |
| | 2 | 0.027 | 0.096 | 0.141 | 0.189 | 0.288 | 0.375 | 0.432 | 0.441 | 0.422 | 0.384 | 0.243 |
| | 3 | 0.001 | 0.008 | 0.016 | 0.027 | 0.064 | 0.125 | 0.216 | 0.343 | 0.422 | 0.512 | 0.729 |
| 4 | 0 | 0.656 | 0.410 | 0.316 | 0.240 | 0.130 | 0.063 | 0.026 | 0.008 | 0.004 | 0.002 | 0.000 |
| | 1 | 0.292 | 0.410 | 0.422 | 0.412 | 0.346 | 0.250 | 0.154 | 0.076 | 0.047 | 0.026 | 0.004 |
| | 2 | 0.049 | 0.154 | 0.211 | 0.265 | 0.346 | 0.375 | 0.346 | 0.265 | 0.211 | 0.154 | 0.049 |
| | 3 | 0.004 | 0.026 | 0.047 | 0.076 | 0.154 | 0.250 | 0.346 | 0.412 | 0.422 | 0.410 | 0.292 |
| | 4 | 0.000 | 0.002 | 0.004 | 0.008 | 0.026 | 0.063 | 0.130 | 0.240 | 0.316 | 0.410 | 0.656 |



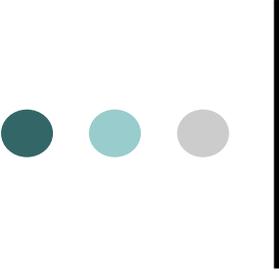
Exemplo

- Aplicando a fórmula para calcular a probabilidade:

- Obs.: arredonde apenas o resultado final

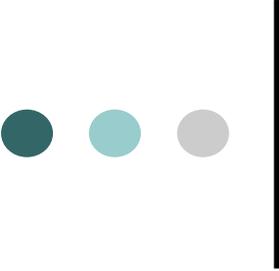
$$P(3) = \frac{15!}{(15-3)! \cdot 3!} 0,1^3 \cdot 0,9^{(15-3)} = 0,129$$

- Aplicando as tabelas de probabilidades binomiais, calcule a probabilidade de ao menos 3 serem canhotos.
 - $P(\text{ao menos } 3) = P(3) + P(4) + P(5) + \dots + P(15) = 1 - P(0) - P(1) - P(2)$
 - $P(\text{ao menos } 3) = 1 - 0,206 - 0,343 - 0,267 = 0,184$



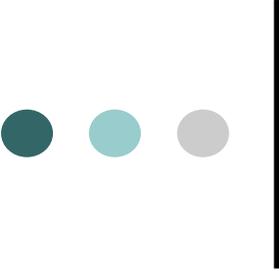
Exemplo

- Uma empresa aérea possui 20% de todas as linhas domésticas. Supondo que todos os vôos domésticos deste país tenham a mesma chance de um acidente, escolhendo 7 acidentes aleatoriamente, qual o número médio de acidentes com esta empresa e o desvio padrão.



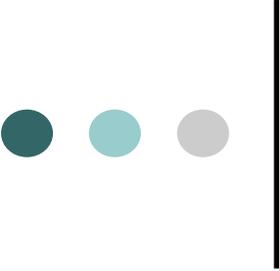
Exemplo

- Uma empresa aérea possui 20% de todas as linhas domésticas. Supondo que todos os vôos domésticos deste país tenham a mesma chance de um acidente, escolhendo 7 acidentes aleatoriamente, qual o número médio de acidentes com esta empresa e o desvio padrão:
 - $n=7$; $p=0,20$; $q=0,8$
 - $\mu=n.p = 7.0,2 = 1,4$ acidentes em média serão com esta empresa de 7 escolhidos aleatoriamente
 - $\sigma = \sqrt{n.p.q} = \sqrt{0,12} = 1,1 \rightarrow$ Desvio padrão de número de acidentes com esta empresa em 7 escolhidos aleatoriamente



Exemplo

- O método Ericsson de seleção de sexo tem uma taxa admitida de 75% de sucesso. Suponha que 100 casais utilizem este método, com o resultado de que, dentre 100 recém-nascidos, há 75 meninas.
 - A) Se o método não produz efeito, e então meninos e meninas são igualmente prováveis, determine a média e o desvio padrão do número de meninas em um grupo de 100 crianças.
 - B) Considere o método como eficaz e recalcule.
 - C) Podemos considerar o método como eficaz? Por quê?



Exemplo

- O método Ericsson de seleção de sexo tem uma taxa admitida de 75% de sucesso. Suponha que 100 casais utilizem este método, com o resultado de que, dentre 100 recém-nascidos, há 75 meninas.
 - A) se o método não produz efeito, e então meninos e meninas são igualmente prováveis, determine a média e o desvio padrão do número de meninas em um grupo de 100 crianças.
 - $\mu = n.p = 100.0,5 = 50$ meninas em média
 - $\sigma = \sqrt{n.p.q} = \sqrt{100.0,5.0,5} = 5 \rightarrow$ desvio padrão de meninas
 - B) Considere o método como eficaz e recalcule.
 - $\mu = n.p = 100.0,75 = 75$ meninas em média
 - $\sigma = \sqrt{n.p.q} = \sqrt{100.0,75.0,25} = 4,33 \rightarrow$ desvio padrão de meninas
 - Podemos considerar o método como eficaz? Por quê?