



# Probabilidade

Multiplicação e Teorema de Bayes



# Regra da Multiplicação

- Num teste, são aplicadas 2 questões de múltipla escolha. Na primeira questão, as respostas possíveis são V ou F. Na segunda, a, b, c, d ou e. Se um aluno decidir “chutar” a respostas, quantas alternativas terá?
  - 1o passo: 2 alternativas  $\Rightarrow m$
  - 2o passo: 5 alternativas  $\Rightarrow n$
  - Alternativas possíveis:  $m \times n = 2 \times 5 = 10$  alternativas de respostas diferentes.
- Considerando a probabilidade de acertar ambas questões:
  - Somente uma alternativa, dentre as 10 possibilidades de respostas diferentes para a prova, equivale a acertar 100% da prova.
  - $P(\text{acerto}) = 1/10 = 0,1$



# Regra da Multiplicação

- Considerando as respostas individualmente:
  - $P(\text{acerto na 1o questão}) = \frac{1}{2}$
  - $P(\text{acerto na 2o questão}) = \frac{1}{5}$
  - Como  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{10} \dots$
  - Verificamos que:

$$P(\text{acerto 1º e acerto 2º}) = P(\text{acerto 1º}) \times P(\text{acerto 2º})$$

Contudo, nem sempre as relações entre os experimentos A e B acontecem de forma *independente*.



# Regra da Multiplicação

- O interesse agora é estimar a probabilidade de dois eventos ocorrerem em passos distintos.
- A palavra-chave aqui é a conjunção “***E***”
  - $P(A \text{ e } B) = P(\text{ocorrência de } A \text{ e de } B)$
- Exemplo: sair duas faces ímpares no arremesso de dois dados (J e K)

$$P(\text{J ímpar } \underline{\text{e}} \text{ K ímpar}) = P(\text{J ímpar}) \times P(\text{K ímpar})$$



# Regra da Multiplicação

- Um fabricante produz um lote de 50 peças, das quais 6 são defeituosas. Se escolhermos duas peças aleatoriamente, qual a probabilidade de ambas serem boas?

$$P(1^{\circ} \text{ peça boa } E \text{ } 2^{\circ} \text{ peça boa}) = ???$$

# Regra da Multiplicação

- Um fabricante produz um lote de 50 peças, das quais 6 são defeituosas. Se escolhermos duas peças aleatoriamente, qual a probabilidade de ambas serem boas?

$$P(1^{\circ} \text{ peça boa } E \text{ } 2^{\circ} \text{ peça boa}) = ???$$

$$P(1^{\circ} \text{ peça boa}) = 44/50 = 0,88$$

$$P(2^{\circ} \text{ peça boa}) = 43/49 = 0,8775$$

$$\text{Regra da Multiplicação: } 2 \text{ passos} \rightarrow 0,88 * 0,8775 = \mathbf{0,7722}$$



# Regra da Multiplicação

- Um fabricante produz um lote de 50 transistores, dos quais 6 são defeituosos. Se realizarmos duas retiradas de peças aleatoriamente e em seqüência, **com reposição** – considerar que o transistor da primeira retirada é repostado ao lote antes da segunda retirada – qual a probabilidade de ambas serem boas?



# Regra da Multiplicação

- Um fabricante produz um lote de 50 transistores, dos quais 6 são defeituosos. Se realizarmos duas retiradas de peças aleatoriamente e em seqüência, **com reposição** – considerar que o transistor da primeira retirada é repostado ao lote antes da segunda retirada – qual a probabilidade de ambas serem boas?

$$P(1^{\circ} \text{ transistor bom}) = 44/50 = 0,88$$

$$P(2^{\circ} \text{ transistor bom}) = 44/50 = 0,88$$

$$\text{Regra Multiplicação: } 2 \text{ passos} \rightarrow 0,88 * 0,88 = 0,7744$$





# Conclusões

- Que tipo de cuidado devemos tomar ao aplicarmos esta regra para fazer o cálculo?
  - Identificar se o experimento seguinte “B” é **DEPENDENTE** da ocorrência do evento “A”.
- Pela Notação:
  - se  $P(B | A) \neq P(B)$
  - Lê-se:  $P(B | A) \rightarrow$  Probabilidade de B tal que A tenha ocorrido (ou *dado* que A tenha ocorrido)
- Portanto, a Regra da Multiplicação é:
  - $P(A \text{ e } B) = P(A) \times P(B | A)$



# Exemplo 3

- Retirando duas cartas de um baralho (52 cartas), determine a probabilidade de que na primeira carta seja um Ás e a segunda um Rei, considerando:
  - Com reposição
  - Sem reposição



# Exemplo 3

- Retirando duas cartas de um baralho (52 cartas), determine a probabilidade de que na primeira carta seja um Ás e a segunda um Rei, considerando:
  - Com reposição
  - Sem reposição

## Com reposição

$$P(\text{ás}) = 4/52$$

$$P(\text{Rei}) = 4/52$$

$$4/52 * 4/52 = 0,0059$$

## Sem reposição

$$P(\text{ás}) = 4/52$$

$$P(\text{Rei}) = 4/51$$

$$4/52 * 4/51 = 0,0060$$



# Eventos Independentes

- Nos exemplos anteriores, ilustra-se o princípio de que a probabilidade do evento B é **DEPENDENTE** do fato do evento A já ter ocorrido. Com base nesta relação, podemos diferenciar **EVENTOS DEPENDENTES** e **INDEPENDENTES**.
- Dois eventos A e B são independentes se a ocorrência de um deles **NÃO** afeta a probabilidade de ocorrência do outro.



# Eventos Independentes: Tratamento

## REGRA INTUITIVA

- Multiplicamos a probabilidade de ocorrência de A pela probabilidade de ocorrência de B, que deve ser calculada considerando a ocorrência prévia de A

## REGRA FORMAL

- $P(A \text{ e } B) = P(A) \times P(B) \rightarrow$  Somente se A e B são independentes
- $P(A \text{ e } B) = P(A) \times P(B|A) \rightarrow$  **Regra da Multiplicação**



# Comentário 1

- As mesmas regras podem ser aplicadas em mais de dois eventos (3 ou mais)
  - Probabilidade de obtermos 3 ases em 3 extrações de cartas de baralho, sem reposição
    - $P(3 \text{ ases}) = \frac{4}{52} \times \frac{3}{51} \times \frac{2}{50} = 0,000181$



## Comentário 2

- Em casos onde são extraídas amostras de grandes populações, os resultados de eventos dependentes e independentes se aproximam e assim podem ser considerados independentes
  - Ex.: pesquisa eleitoral



# Probabilidade Condicional

- Em eventos dependentes:
  - $P(A \text{ e } B) = P(A) * P(B|A)$
- $P(B|A) \rightarrow$  probabilidade de ocorrer B condicionado à ocorrência anterior de A. Assim, a probabilidade de  $P(B|A)$  pode ser definida como:

$$P(B | A) = P(A \text{ e } B) / P(A)$$

**A probabilidade condicional de B *dado* A é a probabilidade de ocorrência do evento B, sabendo que o evento A já ocorreu.**



# Probabilidade Condicional

- Na realidade, através da probabilidade condicional, delimitamos o espaço amostral de ocorrência de um evento que depende de outro.
- Seja este exemplo: qual a probabilidade de, na jogada de um dado, sair um número par, *dado* que o resultado é maior que 2?

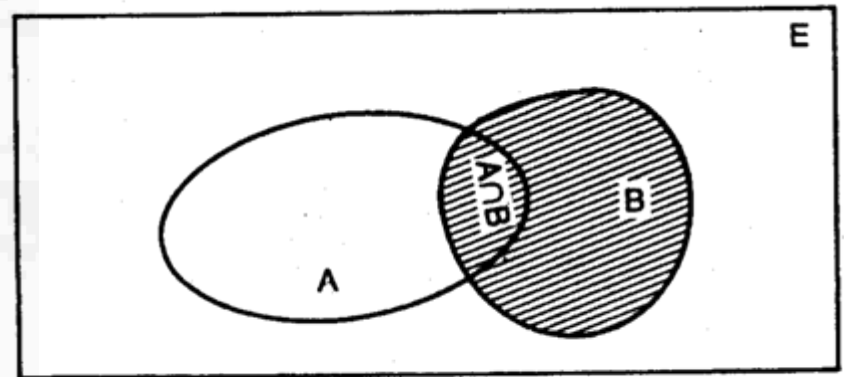
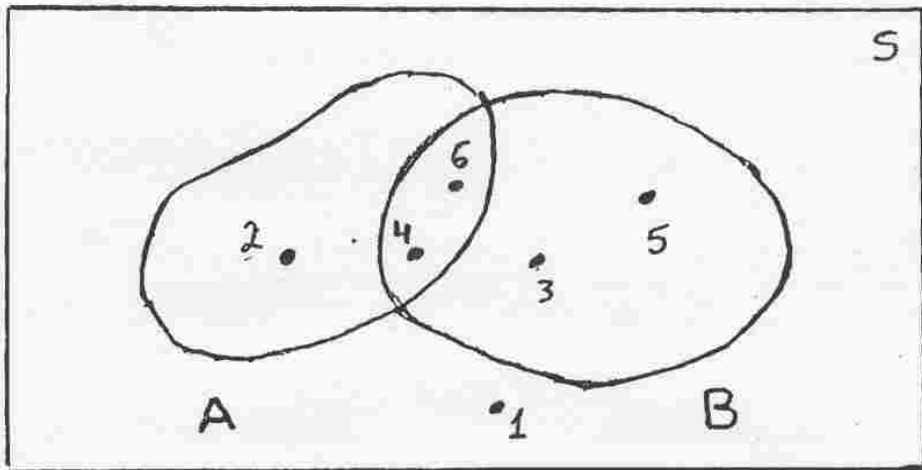


Fig. 4.7  $P(A|B)$ .

# Probabilidade Condicional

- $P(A) = \text{resultado par} = 3/6 = 1/2$
- $P(B) = \text{resultado maior que dois} = 2/3$
- $P(A|B) = P(A \text{ e } B) / P(B) = (1/2) * (2/3) / (2/3) = 1/2$

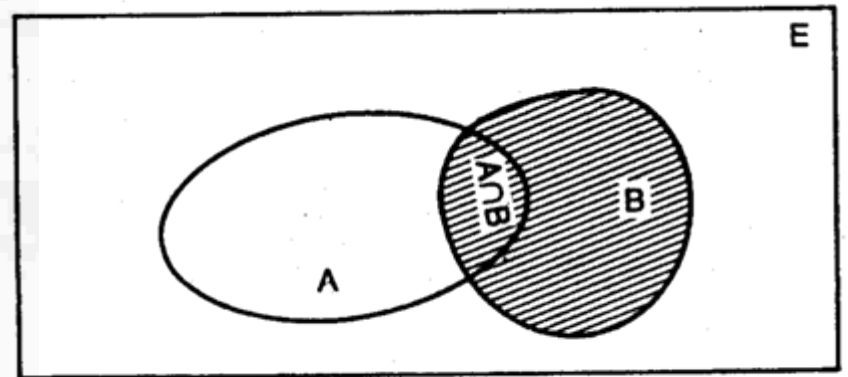
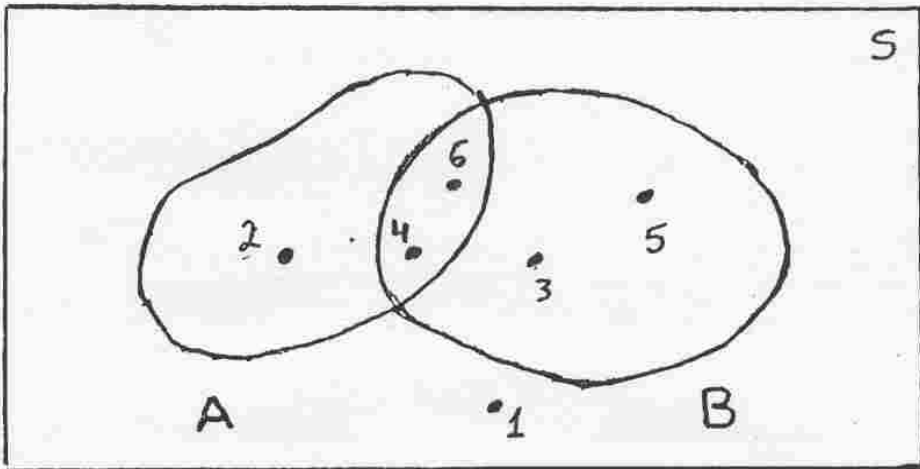


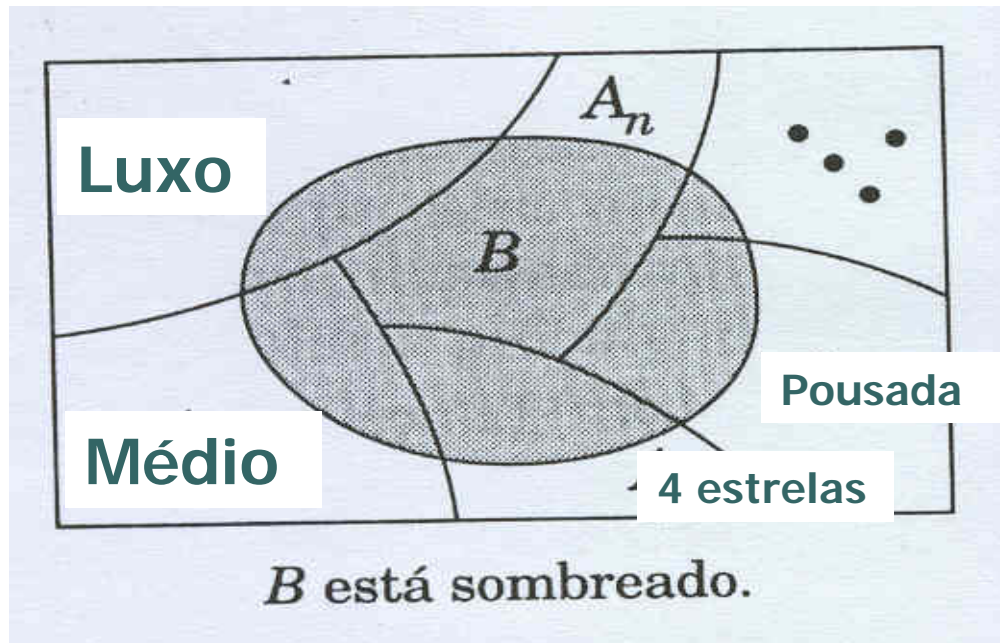
Fig. 4.7  $P(A|B)$ .



# Exemplo

- Qual a probabilidade de um hotel apresentar uma taxa de ocupação num determinado mês entre 40 e 50%?
  - Esta pergunta abre respostas diversas, já que não delimitamos o tipo de hotel – luxo, médio, pousada, rural, praia,...
- Contudo, se perguntássemos: Qual a probabilidade de um hotel padrão luxo apresentar uma taxa de ocupação num determinado mês entre 40 e 50%?
  - O espaço amostral está delimitado à análise de hotéis de luxo.

# Exemplo



**B** → Frequência de Hotéis com taxa de Ocupação ente 40 a 50%



# Probabilidade Condicional

## ○ Teste de Independência

- Se  $P(B|A) = P(B)$

- Ocorrência do evento A não influi na probabilidade do evento B

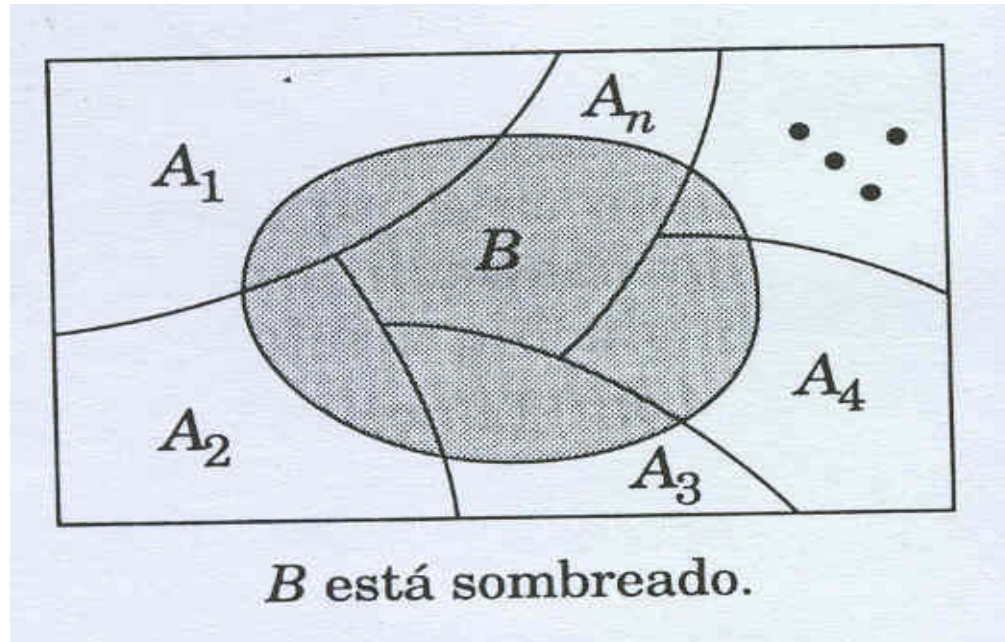
- Se  $P(B|A) \neq P(B)$

- Então A e B são eventos dependentes

- Ou seja:

- $P(A \text{ e } B) = P(A) \cdot P(B) \rightarrow$  independentes
- $P(A \text{ e } B) \neq P(A) \cdot P(B) \rightarrow$  dependentes

# Partição de um Espaço Amostral



$$B = S \cap B = (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \cap B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \dots \cup (A_n \cap B)$$

Conseqüentemente:

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B)$$



# Partição de um Espaço Amostral

- Assim, pela Regra da Multiplicação, podemos escrever:

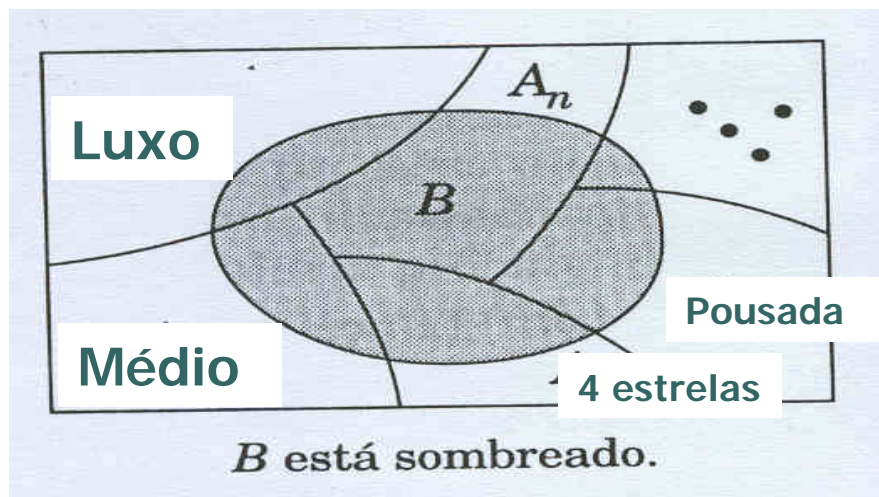
$$P(B) = P(A_1)P(B | A_1) + P(A_2)P(B | A_2) + \dots + P(A_n)P(B | A_n)$$

- Esta afirmação somente é válida quando  $A$  e  $B$  são eventos mutuamente excludentes

# Teorema de Bayes

## ○ $P(B|A_i) \neq P(A_i|B)$

- Probabilidade de um hotel ter 40 a 50% de ocupação dado ser de luxo
  - Analisa a probabilidade de um hotel de luxo ter 40 a 50% de ocupação
- Probabilidade de um hotel ser de luxo entre hotéis que tenham 40 a 50% de ocupação
  - Analisa a probabilidade de um hotel ser de luxo entre todos os hotéis que apresentaram 40 a 50% de ocupação





# Teorema de Bayes

$$P(A_i|B) \neq P(B|A_i)$$

$$P(A_1 | B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)}$$

e

$$P(B | A_1) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(A_1)}$$

$$P(A_1 \cap B) = P(B) \cdot P(A_1 | B)$$

$$P(A_1 \cap B) = P(A_1) \cdot P(B | A_1)$$

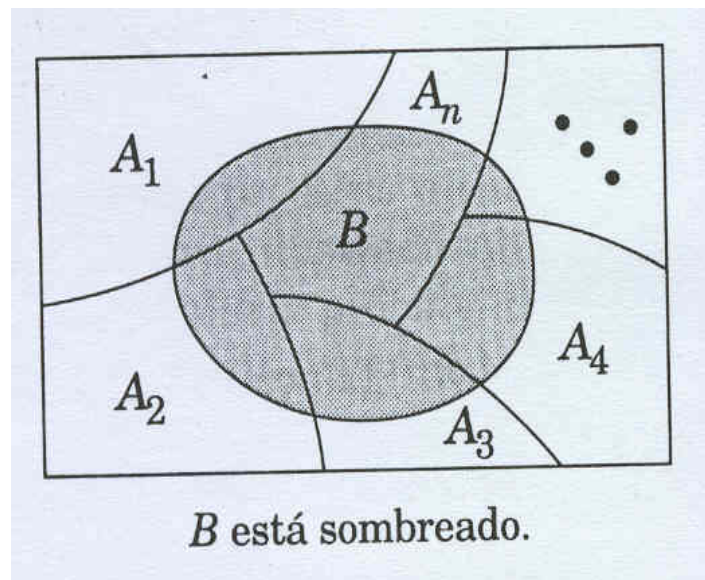
$$\text{Portanto: } P(B) \cdot P(A_1 | B) = P(A_1) \cdot P(B | A_1)$$

$$P(A_1 | B) = \frac{P(A_1) \cdot P(B | A_1)}{P(B)}$$

Mas como muitas vezes não dispomos de  $P(B), \dots$

$$\begin{aligned} \text{Podemos usar: } P(B) &= P(A_1)P(B | A_1) + P(A_2)P(B | A_2) + \dots + P(A_n)P(B | A_n) \\ &= \sum P(A_i) P(B | A_i) \end{aligned}$$

$$P(A_i | B) = \frac{P(A_i) P(B | A_i)}{\sum P(A_i) P(B | A_i)}$$



Este é o famoso Teorema de Bayes



# Teorema de Bayes

$$P(A_i | B) = \frac{P(A_i) P(B | A_i)}{\sum P(A_i) P(B | A_i)}$$

# Exemplo

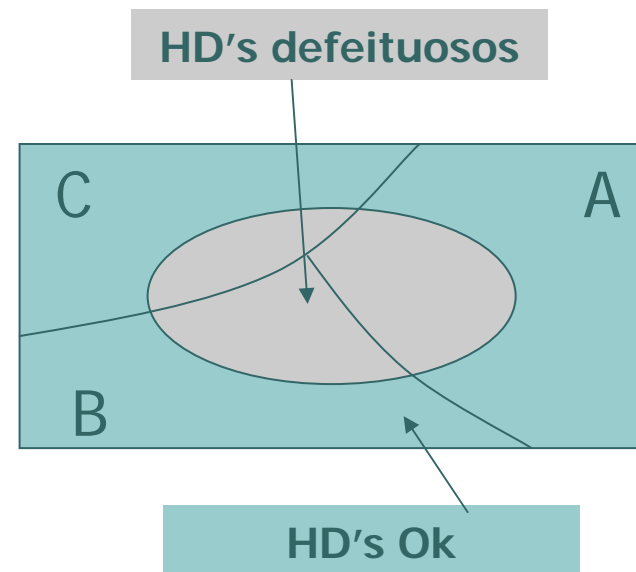
Um fabricante produz HDs em três fábricas (A, B e C), que respondem, respectivamente, por 40%, 35% e 25% de sua produção total.

Registros históricos indicam que 2% da produção de A é defeituosa, assim como 1% da de B, e 3% da fábrica C.

Escolhemos 1 HD aleatoriamente, e ele é defeituoso.



*Qual a probabilidade dele ter sido produzido na fábrica B ?*

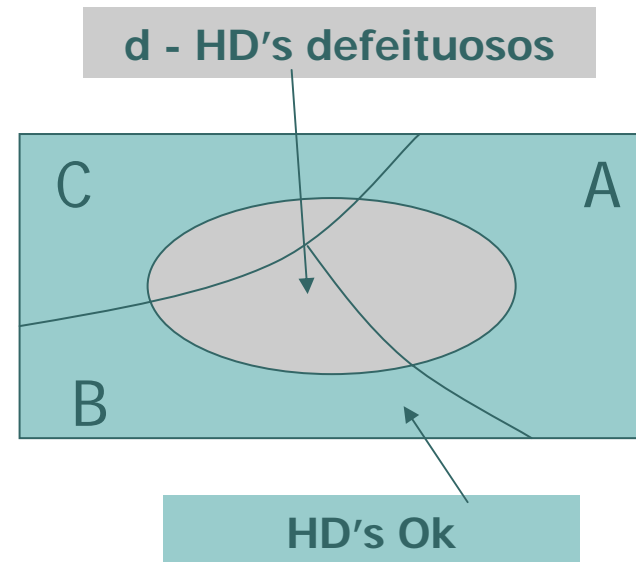


# Teorema de Bayes

- Chamando  $B$  o evento “fabricado em B” e  $d$  o evento “HD defeituoso”, podemos escrever:
- Uma peça defeituosa pode provir de qualquer uma das 3 fábricas (e só de uma!). Logo, eventos mutuamente excludentes.
- Portanto:

$$P(d) = P(A)P(d|A) + P(B)P(d|B) + P(C)P(d|C)$$

$$P(B|d) = \frac{P(B \cap d)}{P(d)} = \frac{P(B) P(d|B)}{P(d)}$$





# Teorema de Bayes

- Assim, de acordo com os valores fornecidos, temos que:

$$P(d) = (0,40 \times 0,02) + (0,35 \times 0,01) + (0,25 \times 0,03) = 0,019$$

- E, portanto,

$$P(B|d) = \frac{(0,35 \times 0,01)}{(0,40 \times 0,02) + (0,35 \times 0,01) + (0,25 \times 0,03)} = 0,184 = 18,4\%$$

# Teorema de Bayes

A visualização deste problema é simplificada pela utilização dos “Diagramas em Árvore”

