Probabilidade

Distribuição Exponencial

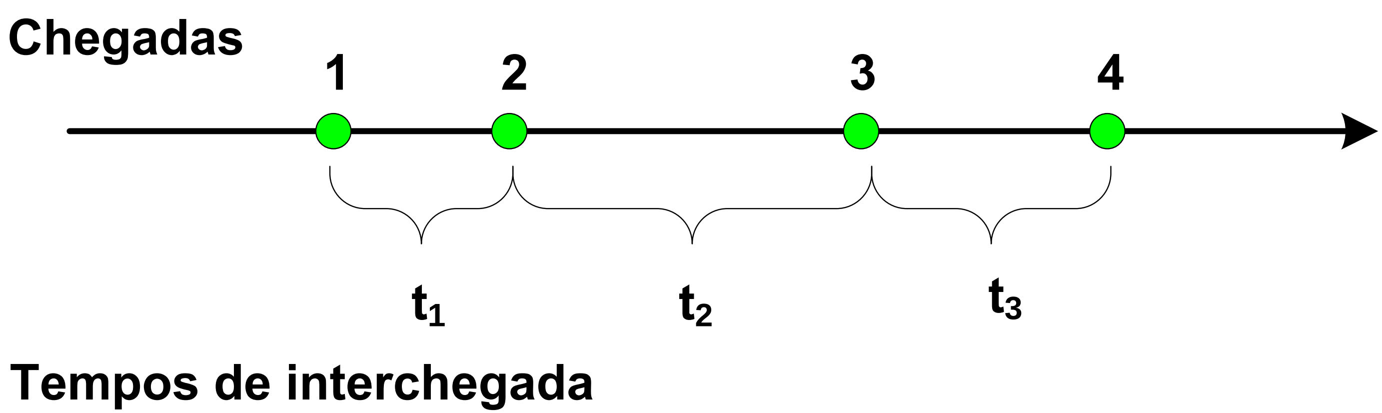
Aplicação

- Aplicada nos casos onde queremos analisar o espaço ou intervalo de acontecimento de um evento;
  - Na <u>distribuição de Poisson</u> – estimativa da quantidade de eventos num intervalo – distribuição de dados discreta.
    - Ex.: um fio de cobre apresenta uma taxa de 2 falhas por metro. Qual a probabilidade de apresentar, em um metro, 4 falhas?
  - A <u>distribuição exponencial</u> está ligada à de Poisson; ela analisa inversamente o experimento: um intervalo ou espaço para ocorrência de um evento.
    - No exemplo do fio, qual a probabilidade de ocorrer uma falha em em 0,5 metros, se ele possui uma taxa de 2 falhas por metro?

Aplicação

	λ		
Poisson	2 falhas/m	Análise de falhas por intervalo	Evento discreto
Exponencial	2 falhas/m	Análise de intervalo por falha	Evento contínuo

Relação entre Distribuições de Poisson e Exponencial



A Curva Densidade de Probabilidade

- A distribuição exponencial depende somente da suposição de que o evento ocorra seguindo o processo de Poisson.
- No exemplo: a probabilidade relacionada ao comprimento do fio depende apenas da suposição das falhas no fio seguirem o processo de Poisson.

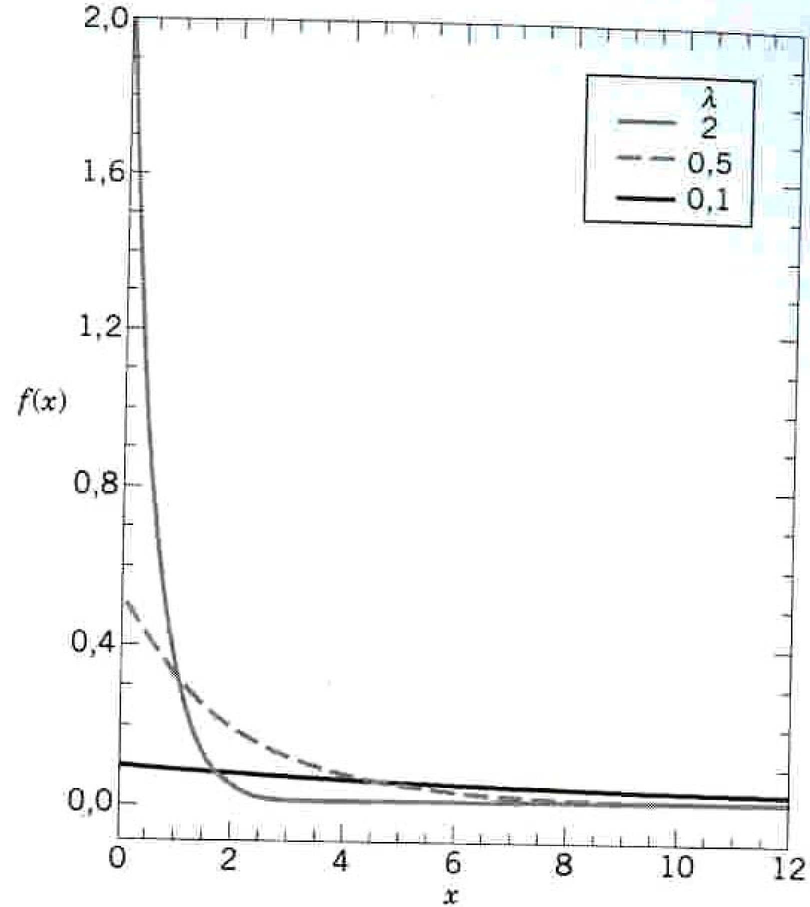
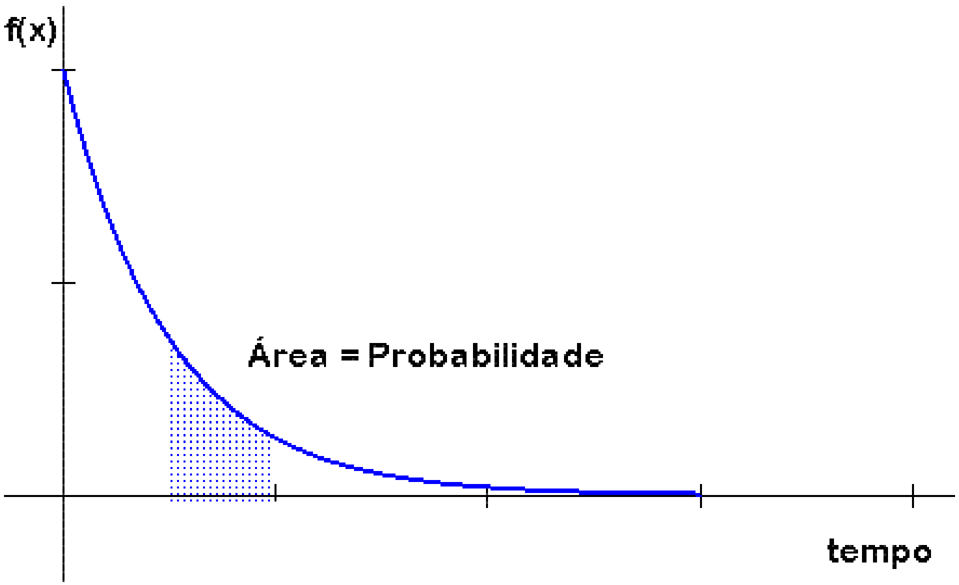
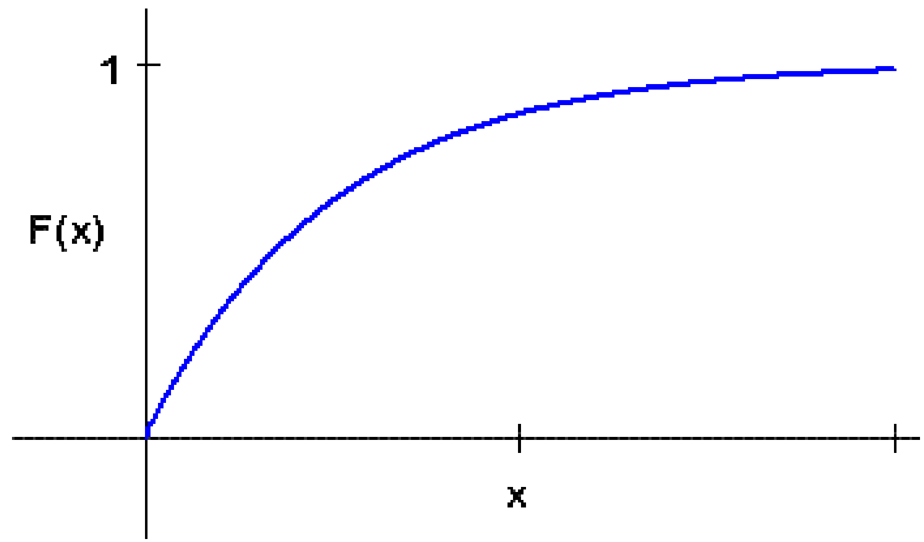


Fig. 5.24 Função densidade de probabilidade de uma variável aleatór exponencial para valores selecionados de λ.

Curvas da Distribuição Exponencial





Definição

- A variável X, que é igual à distância entre contagens sucessivas de um processo de Poisson, com média $\lambda > 0$, tem uma distribuição exponencial com parâmetro λ. A <u>função densidade de probabilidade de X</u> (pdf) é:

$$\boxed{f(x) = \lambda . e^{-\lambda . x}}$$

Para $0 \leq x \leq \infty$

O ponto inicial para medir X não importa, porque a probabilidade do número de falhas em um intervalo de um processo de Poisson depende somente do comprimento do intervalo e não da localização.

Definição

- O parâmetro λ é a taxa de ocorrência por intervalo
  - Mesmo λ de Poisson
- Pode-se usar um parâmetro ‘a’, que é o “tamanho do intervalo entre ocorrências”
  - Ex.: λ = falhas por metro de fio → a = metros de fio entre falhas
  - Ou: λ = ligações por minuto → a = minutos entre ligações
- Assim, tipicamente, $a=1/\lambda$

A pdf de X fica:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{a}.e^{-x/a}}$$

Para $0 \leq x \leq \infty$

Média e Desvio padrão

- Se a variável aleatória X tiver uma distribuição exponencial, com parâmetro λ (ocorrência por intervalo), então:

$$\boxed{E(x) = \frac{1}{\lambda}}$$

$$\boxed{\sigma = \frac{1}{\lambda}}$$

Ou seja, se λ = 2 falhas/m, então o valor esperado de distância por falha é ½ = 0,5m/falha

Média e Desvio padrão

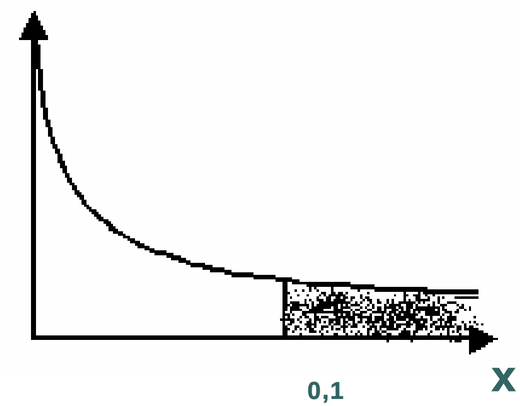
- Se a variável aleatória X tiver uma distribuição exponencial, com parâmetro a (intervalo entre ocorrências), então:

$$\boxed{E(x) = a}$$

$$\boxed{\sigma = a}$$

Exemplo

- Em uma grande rede corporativa de computadores, as conexões dos usuários ao sistema podem ser modeladas como um processo de Poisson, com média de 25 conexões por hora. Qual a probabilidade de não haver conexões em um intervalo de 6 minutos?



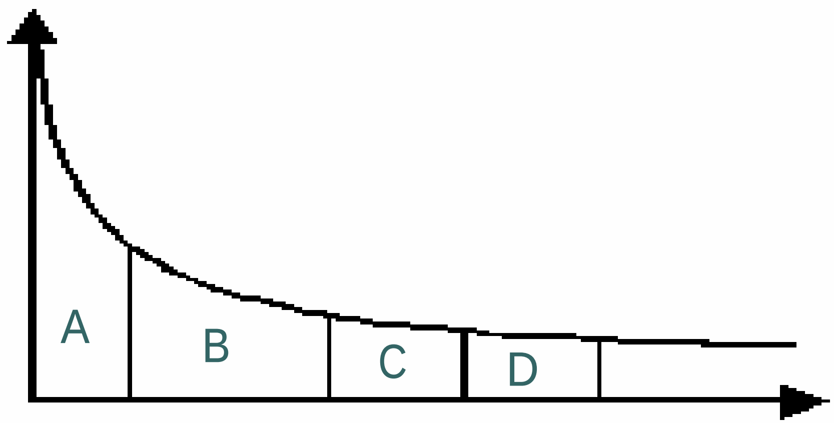
$$\boxed{f(x) = \lambda . e^{-\lambda . x}}$$

$$\boxed{P(X > 0{,}1) = \int_{0{,}1}^{\infty} 25.e^{-25.x}.dx = \cancelto{0}{-e^{-25.\infty}} - (-e^{-25.0{,}1}) = e^{-25.0{,}1} = 0{,}082}$$

Exemplo

- Qual a probabilidade de que o tempo até a próxima conexão esteja entre 2 e 3 minutos?

$$P(0{,}033 < X < 0{,}05) = \int_{0{,}033}^{0{,}05} 25.e^{-25.x}.dx = -e^{-25.0{,}05} - (-e^{-25.0{,}033}) = 0{,}152$$



Exemplo

- Determine o intervalo de tempo tal que a probabilidade de nenhuma conexão ocorrer neste intervalo seja 0,90
- É o mesmo que dizer "um intervalo em que a probabilidade de ocorrer 1 conexão seja de 0,10"

$$P(X \leq x) = 0{,}10 \therefore P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 0{,}90$$

$$P(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x} = 0{,}10 \therefore$$

$$e^{-25.x} = 0{,}90$$

$$x = 0{,}00421 hora \Rightarrow x = 0{,}25 \min$$

E(x) e σ

- Valor esperado até a próxima conexão:
  - E(x)=1/25 = 0,04 horas = 25 min
- O desvio padrão do tempo até a próxima conexão
  - σ = 1/25 = 0,04 hora = 25 min

Comentários

- A probabilidade de não haver conexão no intervalo de 6 minutos é 0,082 independente do tempo inicial do intervalo, pois o processo de Poisson supõe que os eventos ocorrem uniformemente através do intervalo de observação, não ocorrendo agrupamentos de eventos.
- Assim, a probabilidade de ocorrência da primeira ligação após 12:00 ser depois de 12:06 é a mesma probabilidade de conexão depois das 15:00 ocorrer após 15:06.

Comentários

- Propriedade de Falta de Memória
  - Seja X o tempo entre detecções de uma partícula rara em um contador *geiger* e considere que X tenha uma distribuição exponencial com a=1,4 minutos. A probabilidade de detectarmos uma partícula dentro de 30 segundos a partir do começo da contagem é:
  - Obs: a=1,4 minutos → λ=1/1,4 partículas/minuto para o processo de Poisson

$$P(X < 0{,}5 \text{ min}) = 1 - e^{-0{,}5/1{,}4} = 0{,}30$$

- Agora, supondo que ligamos o contador *geiger* e esperamos 3 minutos sem detectar partícula. Qual a probabilidade de uma partícula ser detectada nos próximo 30 segundos?

$$P(X < 3{,}5 / X > 3 \text{ min}) = P(3 < X < 3{,}5) / P(X > 3)$$

$$P(3 < X < 3{,}5) = F(3{,}5) - F(3) = [1 - e^{-3{,}5/1{,}4}] - [1 - e^{-3/1{,}4}] = 0{,}0035$$

$$P(X > 3) = e^{-3/1{,}4} = 0{,}117$$

$$P(3 < X < 3{,}5) / P(X > 3) = 0{,}035 / 0{,}117 = 0{,}3$$

Comentários

- Depois de esperar por 3 minutos sem uma detecção, a probabilidade de uma detecção nos próximos 30 segundos é a mesma probabilidade de uma detecção nos 30 segundos imediatamente após começar a contagem.

Uso

- A distribuição exponencial é freqüentemente usada em estudos de confiabilidade como sendo o modelo para o tempo até a falha de um equipamento – muito utilizado para componentes eletrônicos

Uso

- Exemplo:
  - O tempo de vida até a falha de um semicondutor pode ser modelado por uma variável aleatória exponencial com média de 40.000h.

Uso

- Exemplo:
  - A propriedade de falta de memória da distribuição exponencial implica que o equipamento não se desgasta, ou seja: independente de quanto tempo o equipamento tenha operado, a probabilidade de uma falha nas próximas 1.000h é a mesma que a probabilidade de uma falha nas primeiras 1.000 horas de vida do equipamento

Uso

- Exemplo:
  - Portanto, equipamentos que sofrem desgaste com o tempo (a taxa de falha varia com o tempo de uso), como peças mecânicas (mancais, rolamentos,...) são melhor modelados por uma distribuição tal que $P(L<t+\Delta t/L>t)$ (sendo L o tempo de vida do equipamento) aumente com o tempo – distribuições de Weibull