2 - Relações e funções

Nesta seção, vamos definir um conceito muito importante no Cálculo Diferencial e Integral: o de *função*. No entanto, antes de fazê-lo, temos que estudar dois outros conceitos: o de *par ordenado* e o de *relação*.

2.1 - Pares ordenados

Quando estudamos a teoria dos conjuntos, vimos que a ordem dos elementos não altera o conjunto ao qual eles pertencem. Por exemplo,

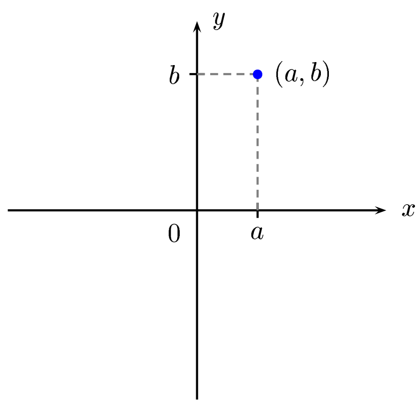
$$\{a, b, c, d\} = \{a, c, d, b\}.$$

No entanto, existem certas situações em que a ordem é importante. No caso de um conjunto com dois elementos, chamaremos *par ordenado*, indicado por (a, b), o conjunto de elementos a e b onde a ordem dos elementos é importante. Note que, de acordo com esta definição, temos

$$(a, b) \neq (b, a) \ .$$

Exs.: são pares ordenados: $(2, 7)$, $(12, -1)$, $(\text{primeiro}, \text{segundo})$, $(\text{porco}, \text{salsicha})$.

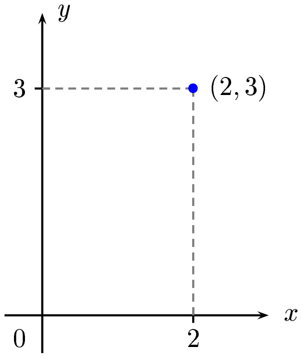
Quando ambos os elementos do par ordenado forem números reais, podemos representar o par ordenado em um *sistema cartesiano de coordenadas*, que é um plano onde são definidos dois eixos de números reais, chamados x e y, de forma que eles se cruzem nos pontos $x = 0$ e $y = 0$, sendo o eixo x posto na horizontal e o eixo y, na vertical. Um par ordenado (a, b) pode ser representado nesse sistema de coordenadas se associarmos ao elemento a um valor no eixo x e ao elemento b um valor no eixo y. Desta forma, podemos encontrar um ponto de coordenadas (a, b) nesse sistema cartesiano, representando assim o par ordenado (como na figura ao lado).



René Descartes *(1596-1650): grande matemático e filósofo francês. Quando jovem, alistou-se como soldado com o fim de adquirir uma melhor visão do mundo. Em 1637 publica sua obra* Discurso sobre o Método*, em que apresenta uma nova filosofia em que tudo é regido pela razão e por um método científico descrito por ele. Nesta mesma obra, escreveu um apêndice científico intitulado* Geometria*, onde traduz operações algébricas em linguagem geométrica. Também criou o sistema ortogonal de coordenadas, chamado depois de* cartesiano*, em sua homenagem.*

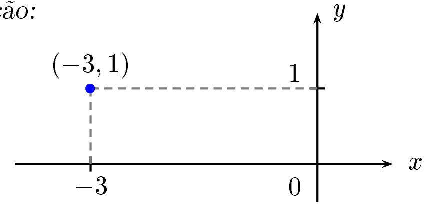
Ex.1: represente o par ordenado $(2, 3)$ no sistema cartesiano de coordenadas.

Solução:



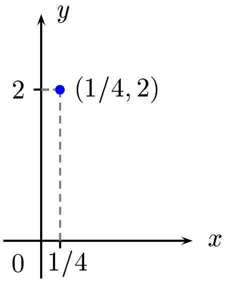
Ex.2: represente o par ordenado $(-3, 1)$ no sistema cartesiano de coordenadas.

Solução:



Ex.3: represente o par ordenado $\left(\frac{1}{4}, 2\right)$ no sistema cartesiano de coordenadas.

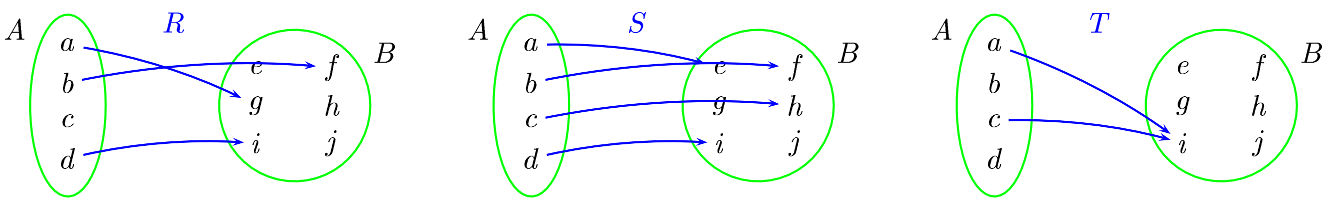
Solução:



2.2 - Relações

Dados dois conjuntos, A e B, chamamos de *relação* de A em B (mais precisamente, *relação binária* de A em B) um conjunto de pares ordenados tal que os primeiros elementos dos pares ordenados pertencem ao conjunto A e os segundos elementos dos pares ordenados pertencem ao conjunto B.

Deste modo, dados os conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{e, f, g, h, i, j\}$, temos que $R = \{(a, g), (b, f), (d, i)\}$ é uma relação de A em B. Da mesma forma, os conjuntos $S = \{(a, e), (b, f), (c, h), (d, i)\}$ e $T = \{(a, i), (c, i)\}$ também são relações de A em B, pois relacionam elementos de A a elementos de B. Estas relações estão representadas abaixo em termos de diagramas de Euler-Venn.



Ex.1: escreva uma relação entre os conjuntos $A = \{2, 0\}$ e $B = \{-1, 3, 4\}$.

Solução: uma das relações possíveis é $R = \{(2, -1), (0, 4)\}$.

Ex.2: escreva uma relação entre os conjuntos $C = \{-1, 4, -3, 2, 7\}$ e $D = \{-1, 1\}$.

Solução: uma das relações possíveis é $R = \{(4, -1), (-3, 1), (2, 1)\}$.

Ex.3: escreva uma relação entre os conjuntos $E = \{\text{elefante}, \text{girafa}, \text{boi}\}$ e $F = \{\text{pescoço}, \text{escamas}, \text{chifres}, \text{tromba}\}$.

Solução: uma das relações possíveis é $R = \{(\text{elefante}, \text{tromba}), (\text{girafa}, \text{pescoço}), (\text{boi}, \text{chifres})\}$.

Também podemos ter relações entre conjuntos infinitos, como o dos números naturais ou dos números reais, como nos exemplos a seguir.

Ex.4: dado o conjunto dos números naturais, $I\!N$, podemos ter a seguinte relação de $I\!N$ em $I\!N$: $R = \{(x, 2x),\ x \in I\!N\}$. Esta relação associa a todo número natural x o valor $2x$. A relação acima é um conjunto infinito.

Ex.5: construa a relação que associa a todo número real o quadrado do seu valor.

Solução: esta relação é dada por $R = \{(x, x^2),\ x \in I\!R\}$.

Ex.6: construa a relação que associa a todo número inteiro o seu valor inverso quanto à soma.

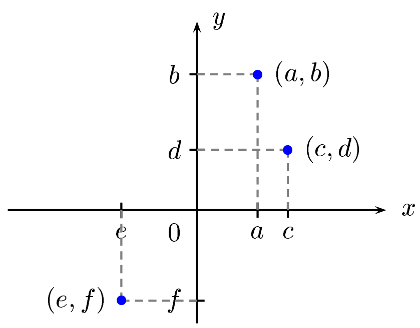
Solução: esta relação é dada por $R = \{(x, -x),\ x \in \mathbf{Z}\}$.

a) Representação gráfica.

Quando a relação envolve somente valores numéricos, podemos representar uma relação no plano cartesiano plotando os pares ordenados que são elementos do conjunto, como no exemplo da relação

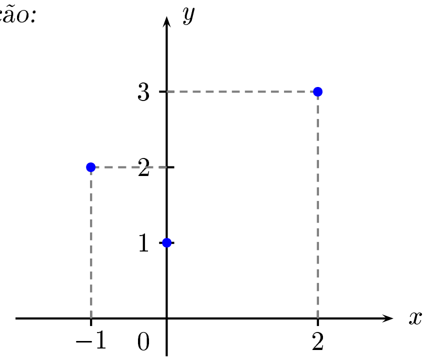
$$R = \{(a, b), (c, d), (e, f)\},$$

onde a, b, c, d, e e f são constantes reais, representada no plano cartesiano ao lado.



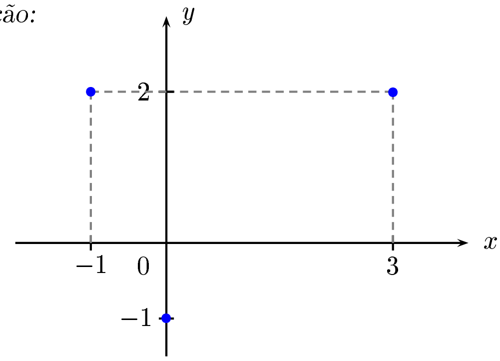
Ex.1: represente a relação $R = \{(2, 3), (-1, 2), (0, 1)\}$ em um sistema cartesiano de coordenadas.

Solução:



Ex.2: represente a relação $R = \{(-1, 2), (0, -1), (3, 2)\}$ em um sistema cartesiano de coordenadas.

Solução:



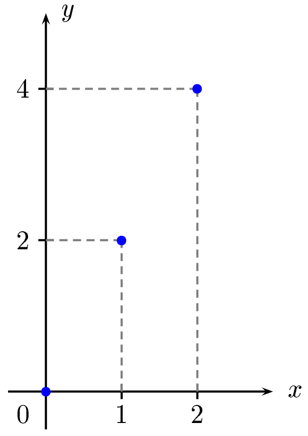
Ex.3: represente a relação $R = \{(x, 2x),\ x \in I\!N\}$ em um sistema cartesiano de coordenadas.

Solução:

para fazer o gráfico desta relação, vamos fazer uma tabela com alguns valores de x e os seus respectivos pares $2x$

x	$2x$
0	0
1	2
2	4

Depois, plotamos esses pontos em um sistema cartesiano de coordenadas, como na figura ao lado. A representação foi feita tomando-se alguns elementos do conjunto formado pela relação, uma vez que seria impossível plotá-los todos.

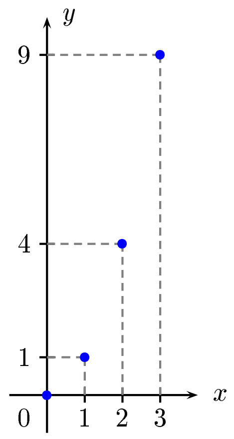


Ex.4: represente a relação $R = \{(x, x^2),\ x \in I\!N\}$ em um sistema cartesiano de coordenadas.

Solução:

primeiro, fazemos uma tabela com alguns dos números e depois plotamos os resultados no gráfico ao lado.

x	x^2
0	0
1	1
2	4
3	9

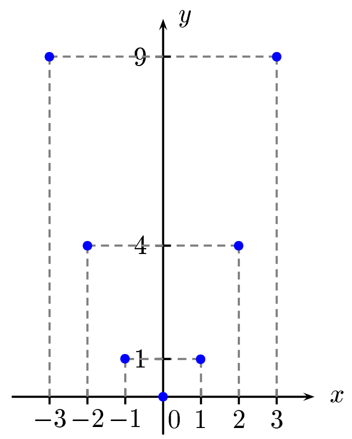


Ex.5: represente a relação $R = \{(x, x^2),\ x \in \mathbf{Z}\}$ em um sistema cartesiano de coordenadas.

Solução:

novamente, fazemos uma tabela com alguns dos números, que agora podem ser negativos, e depois plotamos os resultados no gráfico ao lado.

x	x^2
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9

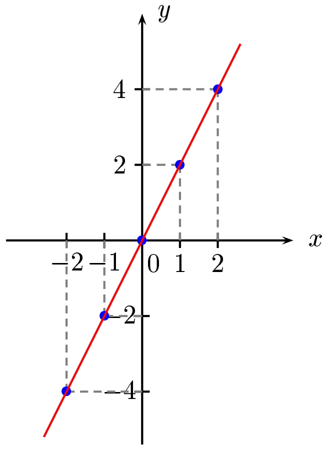


Relações baseadas nos números reais são expressas como curvas contínuas, como nos exemplos seguintes.

Ex.6: represente a relação $R = \{(x, 2x),\ x \in I\!R\}$ em um sistema cartesiano de coordenadas.

Solução:
neste caso, também fazemos uma tabela com alguns dos números e depois plotamos os resultados em um gráfico.

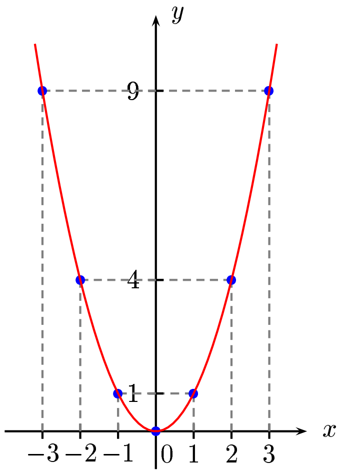
x	$2x$
-2	-4
-1	-2
0	0
1	2
2	4



No entanto, agora a relação será representada por uma reta contínua, expressando o fato de termos uma infinidade contínua de números reais.

Ex.7: represente a relação $R = \{(x, x^2),\ x \in I\!R\}$ em um sistema cartesiano de coordenadas.
Solução:

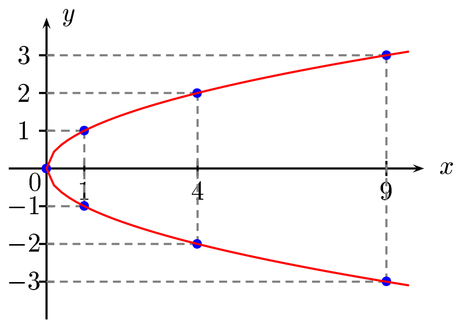
x	x^2
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9



Ex.8: represente a relação $R = \{(x, y),\ x \in I\!R \mid y^2 = x\}$ em um sistema cartesiano de coordenadas.
Solução: da definição da relação, temos

$$y^2 = x \Rightarrow y = \pm\sqrt{x}.$$

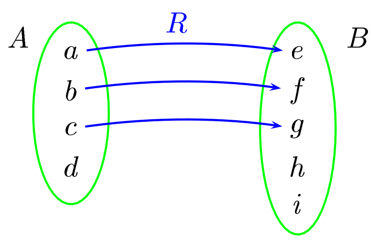
x	y
-2	$\nexists$
-1	$\nexists$
0	0
1	± 1
4	± 2
9	± 3
16	± 4



b) Domínio, contradomínio e imagem.

Dada uma relação R de um conjunto A em um conjunto B, dizemos que A é o *domínio* de R, representado por $A = D(R)$. Também dizemos que B é o *contradomínio* de R, indicado por $B = Cd(R)$. O conjunto dos elementos de B que estão relacionados a elementos de A é chamado *imagem* de R, indicado por $Im(R)$.

Na figura ao lado, representamos os diagramas de Euler-Venn da relação $R = \{(a, e), (b, f), (c, g)\}$ de $A = \{a, b, c, d\}$ em $B = \{e, f, g, h, i\}$. O domínio da relação é $D(R) = A$, o contradomíno de R é $Cd(R) = B$ e a imagem é $Im(R) = \{e, f, g\}$.



Ex.1: dada a relação de $A = \{0, 1\}$ em $B = \{4, -2, 3\}$ descrita por $R = \{(0, 3), (1, -2)\}$, identifique o domínio, o contradomínio e a imagem de R.

Solução: o domínio de R é dado por $D(R) = A$, o contradomínio é $Cd(R) = B$, enquanto a imagem de R é dada por $Im(R) = \{3, -2\}$.

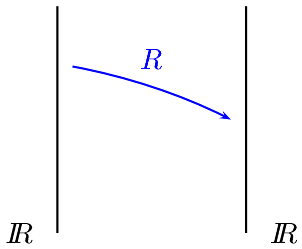
Ex.2: indique o domínio, o contradomínio e a imagem da relação $R = \{(x, x^2),\ x \in \mathbb{R}\}$, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

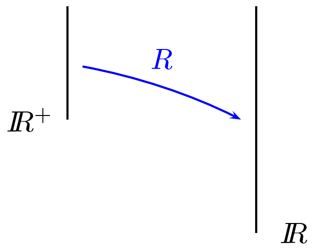
Solução: a relação acima é definida como sendo de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Portanto, $D(R) = \mathbb{R}$ e $Cd(R) = \mathbb{R}$. Como todo número elevado ao quadrado é positivo, temos que $Im(R) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$.

Ex.3: indique o domínio, o contradomínio e a imagem da relação $R = \{(x, \sqrt{x}),\ x \in \mathbb{R}^+\}$, de $\mathbb{R}^+$ em $\mathbb{R}$, onde $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$.

Solução: a relação acima tem como domínio $D(R) = \mathbb{R}^+$ e contradomínio $Cd = \mathbb{R}$. A imagem é dada por $Im(R) = \mathbb{R}^+$. O domínio e contradomínio já vêm expressos na definição da relação e a imagem é conseguida pelo fato de só haverem raízes não-negativas de números reais.

O domínio e o contradomínio de uma relação de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ pode ser representado pela relação entre duas retas dos reais (figura abaixo). Relações entre subconjuntos de $\mathbb{R}$ podem ser representadas de modo semelhante.





c) Produto cartesiano.

Uma relação entre um conjunto A e um conjunto B é chamada *produto cartesiano* de A e B e representada por $A \times B$ quando temos

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}\ .$$

Isto significa que o produto cartesiano entre os dois conjuntos será dado pelo conjunto de todos os pares ordenados que podem ser formados utilizando os elementos dos conjuntos A e B onde o primeiro elemento pertence ao conjunto A e o segundo elemento pertence ao conjunto B.

Ex.1: Calcule o produto cartesiano entre os conjuntos $A = \{2, 3, 4\}$ e $B = \{-1, 1\}$.

Solução: $A \times B = \{(2, -1), (2, 1), (3, -1), (3, 1), (4 - 1), (4, 1)\}$.

Ex.2: Calcule o produto cartesiano entre os conjuntos $C = \{0, 1\}$ e $D = \{1, 2\}$.

Solução: $C \times D = \{(0, 1), (0, 2), (1, 1), (1, 2)\}$.

O produto cartesiano entre o conjunto dos números reais com ele mesmo é dado por $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e representa todos os pontos de um plano infinito. Como ele é o produto cartesiano entre duas retas dos reais, ele também é escrito como $\mathbb{R}^2$, isto é, $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

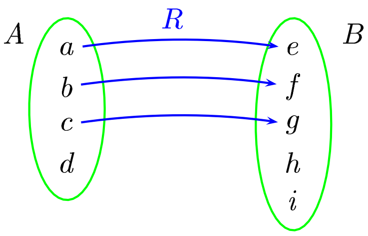
2.3 - Funções

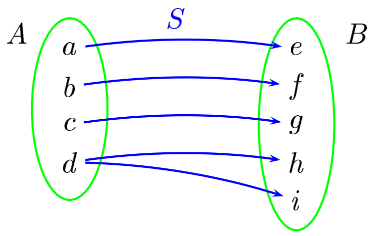
Dados um conjunto A e um conjunto B, uma *função* f de A em B é uma relação de A em B que obedece às duas condições seguintes:

1) todo elemento de A pertence à função;
2) a todo elemento $a \in A$ é associado um único elemento $b \in B$.

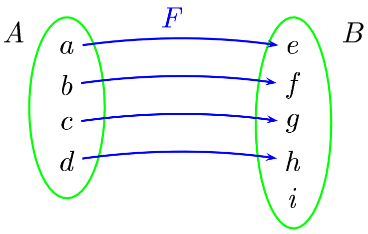
Estas duas condições restringem os tipos de relações que serão também funções, mas tais restrições tornam as funções mais fáceis de serem utilizadas, principalmente pelas ferramentas do Cálculo Diferencial e Integral.

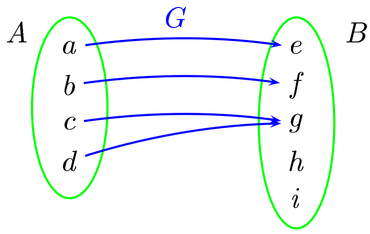
Os diagramas de Euler-Venn abaixo não representam funções: no primeiro (relação R), nem todos os elementos do domínio têm uma imagem. No segundo (relação S), um elemento do domínio tem mais de uma imagem.





Já os diagramas de Euler-Venn seguintes representam funções: em ambos os casos todos os elementos dos domínios têm elementos correspondentes no contradomínio e cada elemento do domínio tem somente uma imagem. Note que no segundo caso (função G), dois elementos do domínio têm a mesma imagem, o que é permitido.





A seguir, temos alguns exemplos numéricos de relações e funções.

Ex.1: verifique se a relação $R = \{(3,1),(2,-1),(3,2),(4,1)\}$ de $A = \{3,2,4\}$ em $B = \{-1,1,2\}$ é função.

Solução: R não é função, pois associa o valor $3 \in A$ a dois valores de B.

Ex.2: verifique se a relação $R = \{(3,1),(2,-1)\}$ de $A = \{3,2,4\}$ em $B = \{-1,1,2\}$ é função.

Solução: R não é função, pois o elemento 4 não foi associado a nenhum elemento do conjunto B.

Ex.3: verifique se a relação $R = \{(3,1),(2,-1),(4,2)\}$ de $A = \{3,2,4\}$ em $B = \{-1,1,2\}$ é função.

Solução: R é função, pois todo elemento de A está associado a um único elemento de B.

Ex.4: verifique se a relação $R = \{(x,x^2),\ x \in I\!R\}$ de $I\!R$ em $I\!R$ é função.

Solução: R é função, pois associa todo elemento de $I\!R$ a um único elemento de $I\!R$.

Ex.5: verifique se a relação $R = \{(x,y),\ x \in I\!R \mid x^2 + y^2 = 4\}$ de $I\!R$ em $I\!R$ é função.

Solução: temos que $x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow y^2 = 4 - x^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{4 - x^2}$. Portanto, R não é função, pois associa elementos de $I\!R$ a dois valores distintos em $I\!R$, dados pelos valores positivos e negativos da raiz.

A representação de funções em um sistema cartesiano de coordenadas segue as mesmas regras que a representação de relações. O mesmo vale para os conceitos de domínio, contradomínio e imagem de funções. Esses assuntos serão melhor abordadas nos próximos capítulos.

a) Representação funcional.

Uma função de A em B dada por $f = \{(x,y),\ x \in A \mid y = f(x)\}$ também pode ser escrita como $f(x) = y$, onde A e B são subentendidos. Esta representação é a mais usada e será adotada nos próximos capítulos.

Ex.1: a função $f = \{(x,x^2),\ x \in I\!R\}$ de $I\!R$ em $I\!R$ pode ser escrita como $f(x) = x^2$.

Ex.2: a função $g = \{(x, 3x-1),\ x \in I\!R\}$ de $I\!R$ em $I\!R$ pode ser escrita como $g(x) = 3x - 1$.

Ex.3: a função $h = \{(x, \sqrt{x}),\ x \in I\!R \mid x \geq 0\}$ de $A = \{x \in I\!R \mid x \geq 0\}$ em $B = \{x \in I\!R \mid x \geq 0\}$ pode ser escrita como $h(x) = \sqrt{x}$.

b) Domínio e Imagem de uma função.

A notação funcional não explicita o domínio e imagem de uma função. Estes devem ser deduzidos a partir da forma desta. A seguir, vamos analisar alguns casos.

Ex.1: determine o domínio e a imagem da função $f(x) = x^2$.

Solução: a função é definida para qualquer valor da variável x pertencente os reais. Por isso, $D(f) = I\!R$. Como só existem quadrados positivos de números reais, temos que $Im(f) = I\!R^+ = \{y \in I\!R \mid y \geq 0\}$.

Ex.2: determine o domínio e a imagem da função $f(x) = \frac{1}{x}$.

Solução: a função é definida para qualquer valor da variável x pertencente os reais contanto que x não seja zero. Por isso, $D(f) = I\!R_* = \{x \in I\!R \mid x \neq 0\}$. Analisando alguns valores da função associados a certos valores da variável x, temos que $Im(f) = I\!R_*$.

Ex.3: determine o domínio e a imagem da função $f(x) = \sqrt{x-1}$.

Solução: a função é definida para qualquer valor da variável x pertencente os reais contanto que eles sejam maiores que 0. Portanto, temos que $x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$. Por isso, $D(f) = \{x \in I\!R \mid x \geq 1\}$. Como só existem raízes quadradas positivas de números reais, temos que $Im(f) = I\!R^+ = \{y \in I\!R \mid y \geq 0\}$.

Ex.4: determine o domínio e a imagem da função $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

Solução: como a expressão $x^2 - 1$ está dentro de uma raíz, devemos ter $x^2 - 1 \geq 0$. Como esta raíz encontra-se no denominador de uma fração, também devemos ter $x^2 - 1 \neq 0$. Portanto, $x^2 - 1 > 0 \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow -1 < x < 1$. Portanto, $D(f) = \{x \in I\!R \mid -1 < x < 1\}$. Como só existem quadrados positivos de números reais e não podemos ter o zero no denominador, temos que $Im(f) = I\!R^+_* = \{y \in I\!R \mid y > 0\}$.

c) Valor numérico de uma função.

Escritas na nova notação, podemos facilmente associar elementos do domínio da função a elementos de sua imagem. Dado um elemento $a \in D(f)$, temos que $f(a) \in Im(f)$.

Ex.1: calcule $f(3)$, onde $f(x) = 4x - 3$.

Solução: $f(3) = 4.3 - 3 = 12 - 3 = 9$.

Ex.2: calcule $f(-1)$, onde $f(x) = x^2 - 3x + 4$.

Solução: $f(-1) = (-1)^2 - 3(-1) + 4 = 1 + 3 + 4 = 8$.

Com isto, terminamos nossa exposição. Nos próximos capítulos estaremos estudando o Cálculo Diferencial e Integral e nossa abordagem será fortemente baseada em funções. No capítulo 3 estudaremos apenas funções de potências naturais, sendo que funções mais complexas serão introduzidas nos capítulos seguintes. A Leitura Complementar trás diversos usos de relações e funções na vida prática.