1 - Trigonometria no triângulo

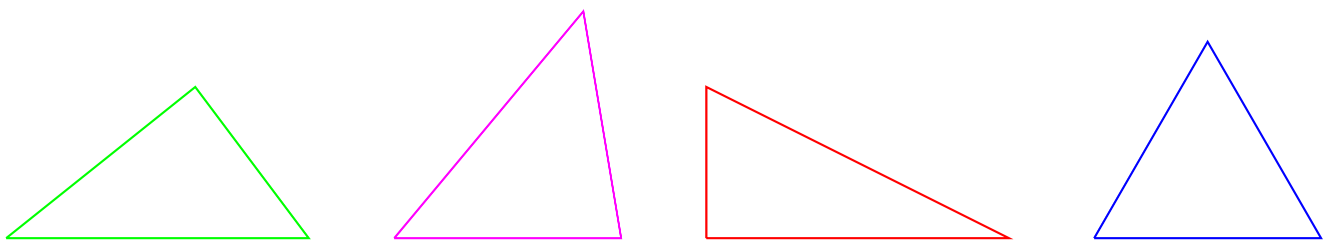
O Cálculo Vetorial alia as poderosas ferramentas do Cálculo Diferencial e Integral à versatilidade dos vetores. Neste curso, iremos estudar as principais técnicas utilizadas por ele, desde a introdução da idéia de vetor até sua utilização no cálculo de derivadas e integrais de funções vetoriais. Antes disso, porém, é necessário que tenhamos uma base sólida de trigonometria, que será revisada neste capítulo.

A trigonometria lidava incialmente com medidas relativas a triângulos, mas foi depois refinada de modo a lidar com ângulos em geral e sistemas que apresentam oscilações. A palavra *trigonometria* vem do grego *trigonos* (triângulo) e *metrein* (medir). Consta que ela já foi usada pelo comerciante e matemático grego *Tales* (cerca de 624-548 a.C.) para calcular alturas de pirâmides egípcias. Segundo os relatos, ele conseguiu fazê-lo comparando a sombra produzida pela pirâmide à sombra produzida por um bastão de comprimento conhecido. Desde então, a trigonometria vem sendo usada em um número enorme de aplicações em diversas áreas.

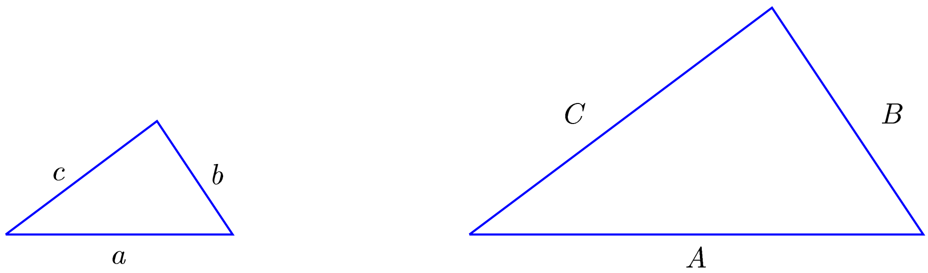
Tales *(cerca de 624-548 a.C.): filósofo e matemático grego nascido na cidade de Mileto. Fundou, junto a outros sábios, a escola de Mileto. Tudo o que se sabe sobre ele vem de fontes indiretas e diz-se que era um homem acostumado a viajar, dono de um saber prático, dedicado à política e ao trabalho intelectual. Conta-se que usou seus conhecimentos de geometria para calcular as alturas de algumas pirâmides egípcias e as distâncias de barcos até a costa.*

1.1 - Triângulos semelhantes

Um triângulo é uma figura bidimensional (plana) de três lados. Uma de suas características é que a soma dos seus ângulos internos é sempre 180^o. Alguns exemplos de triângulos são dados abaixo.

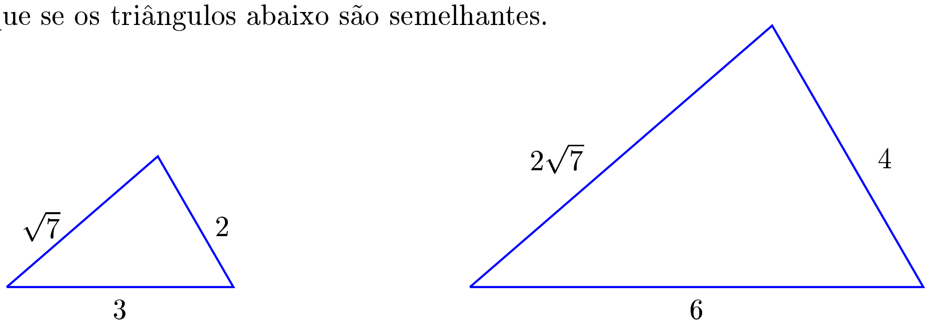


Uma classe importante destes é a dos *triângulos semelhantes*, que são triângulos relacionados de tal forma que as razões entre os lados de um são iguais às razões dos lados do outro.



$$\frac{a}{b}=\frac{A}{B}\ ,\ \frac{a}{c}=\frac{A}{C}\ ,\ \frac{b}{c}=\frac{B}{C}.$$

Ex.1: verifique se os triângulos abaixo são semelhantes.

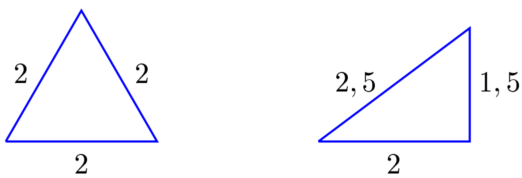


Solução: isso se faz calculando as razões entre os lados dos dois triângulos:

$$\frac{a}{b}=\frac{3}{2}\ ,\ \frac{A}{B}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}\ ;\quad \frac{a}{c}=\frac{3}{\sqrt{7}}\ ,\ \frac{A}{C}=\frac{6}{2\sqrt{7}}=\frac{3}{\sqrt{7}}\ ;\quad \frac{b}{c}=\frac{2}{\sqrt{7}}\ ,\ \frac{B}{C}=\frac{4}{2\sqrt{7}}=\frac{2}{\sqrt{7}}\ .$$

Como todas as razões são iguais, mostramos que os triângulos são semelhantes.

Ex.2: verifique se os triângulos abaixo são semelhantes.



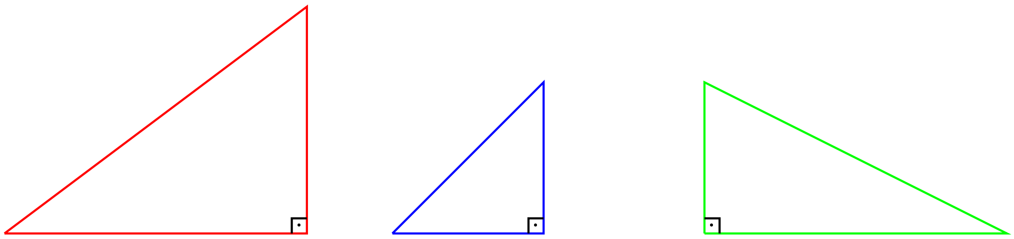
Solução: calculando as razões entre os lados dos dois triângulos, temos:

$$\frac{a}{b}=\frac{2}{2}=1\ ,\ \frac{A}{B}=\frac{2}{1,5}=\frac{4}{3}\ ;\quad \frac{a}{c}=\frac{2}{2}=1\ ,\ \frac{A}{C}=\frac{2}{2,5}=\frac{4}{5}\ ;\quad \frac{b}{c}=\frac{2}{2}\ ,\ \frac{B}{C}=\frac{1,5}{2,5}=\frac{3}{5}\ .$$

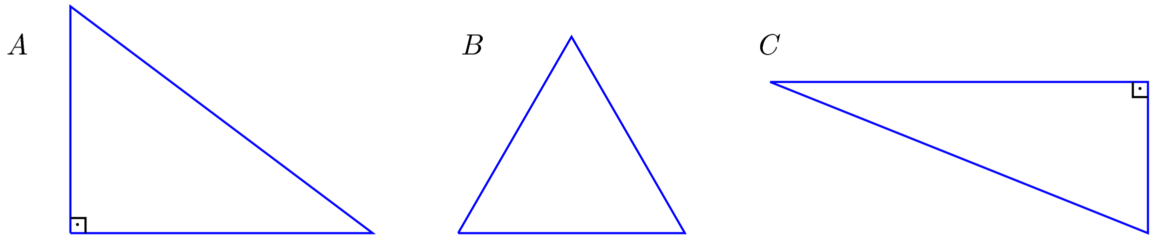
As razões não são as mesmas e, portanto, os triângulos não são semelhantes.

1.2 - Triângulos retângulos

Triângulos retângulos são triângulos tais que um de seus ângulos internos é de 90^o. Este ângulo de 90^o também é chamado de *ângulo reto*. Esse tipo de triângulo é fundamental para o desenvolvimento da trigonometria e também para diversas aplicações práticas. Alguns exemplos de triângulos retângulos são dados a seguir.

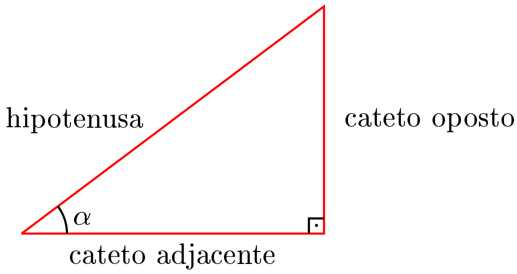


Ex.1: identifique os triângulos retângulos e os que não são triângulos retângulos.

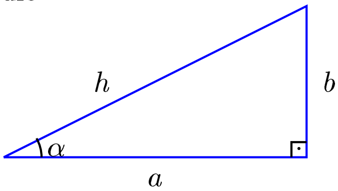


Solução: os triângulos A e C apresentam ângulos internos de 90^o. Portanto, são triângulos retângulos. O triângulo B não é retângulo, pois não apresenta um ângulo interno de 90^o.

Vamos dar nomes a alguns aspectos dos triângulos retângulos. Tomando um dos ângulos internos (que chamaremos de α), podemos dar nomes aos três lados do triângulo. O lado que fica oposto a α é denominado *cateto oposto*. O lado que fica contíguo a α é chamado *cateto adjacente* e o lado restante é chamado de *hipotenusa*.

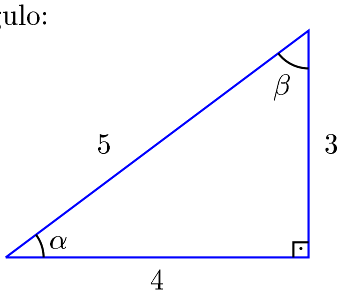


Ex.2: identifique o cateto oposto, o cateto adjacente e a hipotenusa do ângulo α do seguinte triângulo retângulo:



Solução: o cateto oposto é o lado b, o cateto adjacente é o lado a e a hipotenusa é o lado h.

Ex.3: identifique o cateto oposto, o cateto adjacente e a hipotenusa dos ângulos α e β do seguinte triângulo retângulo:



Solução: com relação ao ângulo α, o cateto oposto é 3, o cateto adjacente é 4 e a hipotenusa é 5. Com relação ao ângulo β, o cateto oposto é 4, o cateto adjacente é 3 e a hipotenusa é 5.

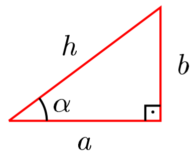
1.3 - Teorema de Pitágoras

Existe uma relação importante entre a medida da hipotenusa e as medidas dos dois catetos de um triângulo retângulo. Essa relação é dada pelo *Teorema de Pitágoras*, que enunciamos a seguir.

T1 - Teorema de Pitágoras: o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

Em termos simbólicos,

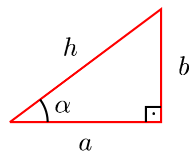
$$\boxed{h^2 = a^2 + b^2,}$$



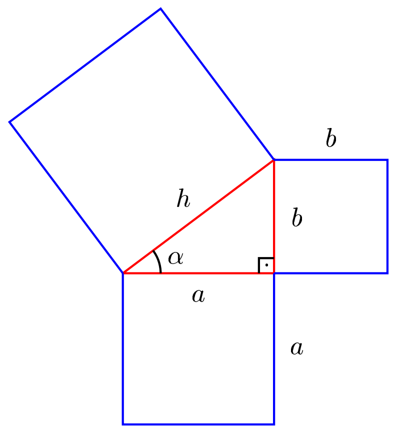
onde a, b e h são indicados na figura ao lado.

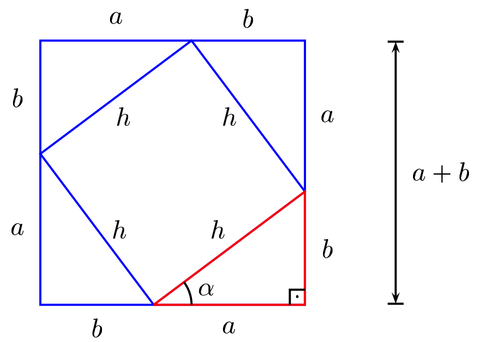
Este teorema é atribuído ao matemático e filósofo grego *Pitágoras* (cerca de 580-500 a.C.). Os gregos antigos tinham uma compreensão bastante geométrica da matemática. Portanto, a demonstração é baseada em geometria.

Demonstração: vamos desenhar um triângulo retângulo de lados arbitrários e escolher um ângulo interno (que não seja o de 90^o) que chamaremos α. O cateto adjacente a esse ângulo tem um comprimento a e o cateto oposto mede b, enquanto a hipotenusa terá o comprimento h.



Quando falamos no quadrado de uma medida, podemos imaginar a área de um quadrado com aquela medida. Desta forma, desenhamos três quadrados, cada um com área equivalente ao quadrado de um dos lados do triângulo retângulo (conforme a figura abaixo, à esquerda).





Agora, vamos considerar o quadrado de lados h, com área h^2 (figura acima, à direita). Esse quadrado pode ser colocado dentro de um outro quadrado de lados $a + b$, como na figura ao lado. A área do quadrado de lado $a + b$ é $(a + b)^2$. Da figura, podemos ver que esta área equivale à área do quadrado de lado h, mais as áreas dos quatro triângulos que o cercam. Todos os triângulos têm as mesmas medidas, de modo que cada um tem uma área dada por $\frac{1}{2}a.b$. Portanto, a área do quadrado de lados $a + b$ é igual à área do quadrado de lado h, mais quatro vezes a área de um dos triângulos que o circundam, isto é,

$$(a + b)^2 = h^2 + 4.\frac{1}{2}ab \Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 = h^2 + 2ab \Rightarrow a^2 + b^2 = h^2 \Rightarrow h^2 = a^2 + b^2.$$

Assim, o teorema está provado.

Pitágoras *(cerca de 580-500 a.C.): um dos maiores matemáticos e filósofos da Grécia antiga. Nasceu na ilha de Samos, então colônia grega, e fundou uma sociedade secreta em Crotona (ao sul da Itália), onde os membros adoravam o mundo perfeito dos números e consideravam a nossa realidade uma pálida sombra deste. Sua influência foi decisiva na formação do pensamento ocidental.*

Ex.1: Calcule a hipotenusa do triângulo retângulo de lados 2 e 3.

Solução: $h^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow h^2 = 2^2 + 3^2 \Rightarrow h^2 = 4 + 9 \Rightarrow h^2 = 13 \Rightarrow h = \sqrt{13}$.

Note que escolhemos somente a raiz positiva da equação, pois a hipotenusa é uma medida positiva.

Ex.2: Calcule a hipotenusa do triângulo retângulo de lados 1 e 6.

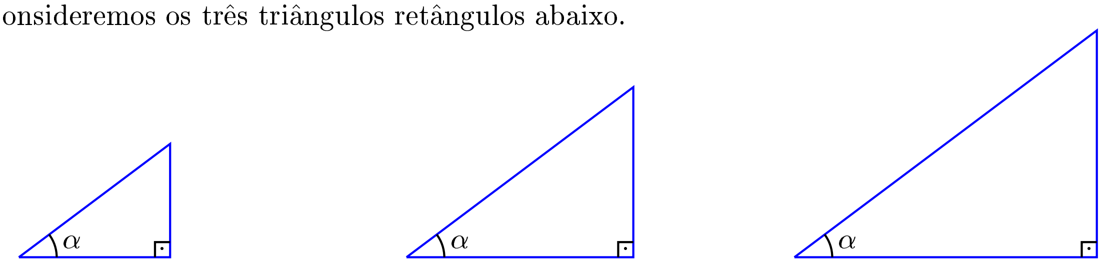
Solução: $h^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow h^2 = 1^2 + 6^2 \Rightarrow h^2 = 1 + 36 \Rightarrow h^2 = 37 \Rightarrow h = \sqrt{37}$.

Ex.3: Calcule o lado desconhecido de um triângulo retângulo de hipotenusa 8 e lado 2.

Solução: $h^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 8^2 = 2^2 + b^2 \Rightarrow 64 = 4 + b^2 \Rightarrow b^2 = 64 - 4 \Rightarrow b^2 = 60 \Rightarrow b = \sqrt{60} \Rightarrow b = \sqrt{2^2.3.5} \Rightarrow$
$\Rightarrow b = 2\sqrt{15}$.

1.4 - Seno, cosseno e tangente

Consideremos os três triângulos retângulos abaixo.



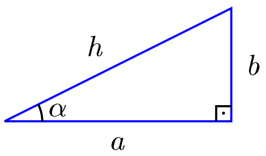
Estes triângulos são todos semelhantes, de modo que as razões entre lados equivalentes são sempre as mesmas. Consideremos agora o ângulo α indicado em cada triângulo, sendo este o mesmo para os três triângulos. As razões entre lados recebem nomes especiais. Nesta seção, abordaremos as três principais, chamadas *seno*, *cosseno* e *tangente* de um ângulo α. As definições são dadas abaixo.

Dado um triângulo retângulo e um ângulo α interno a este, temos as seguintes definições.

D1 - O *seno* do ângulo α é dado por $\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$.

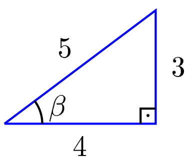
D2 - O *cosseno* do ângulo α é dado por $\cos\alpha = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$.

Ex.1: calcule o seno e o cosseno do ângulo α indicado no triângulo abaixo.



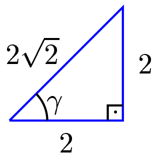
Solução: $\operatorname{sen}\alpha = \frac{b}{h}$, $\cos\alpha = \frac{a}{h}$.

Ex.2: calcule o seno e o cosseno do ângulo β indicado no triângulo abaixo.



Solução: $\operatorname{sen}\beta = \frac{2}{5}$, $\cos\beta = \frac{3}{5}$.

Ex.3: calcule o seno e o cosseno do ângulo γ indicado no triângulo abaixo.



Solução: $\operatorname{sen}\gamma = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\gamma = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Além destes, também é bastante usada a tangente, definida a seguir.

D3 - A *tangente* do ângulo α é dada por $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$.

Ex.4: calcule a tangente do ângulo α indicado no triângulo do exemplo 2.

Solução: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}$.

Ex.5: calcule a tangente do ângulo β indicado no triângulo do exemplo 2.

Solução: $\operatorname{tg}\beta = \frac{3}{4}$.

Ex.6: calcule a tangente do ângulo γ indicado no triângulo do exemplo 3.

Solução: $\operatorname{tg}\gamma = \frac{2}{2} = 1$.

Note que, de acordo com sua definição, a tangente pode ser escrita como a razão entre o seno e o cosseno:

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}},$$

pois temos

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}}{\frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} \cdot \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}},$$

que é a definição da tangente.

1.5 - Secante, co-secante e co-tangente

Outras razões entre lados de triângulos retângulos são dadas pela *secante*, *co-secante* e *co-tangente*, que são definidas a seguir.

D4 - A *secante* do ângulo α é dada por $\sec\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adjacente}}$.

D5 - A *co-secante* do ângulo α é dada por $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto oposto}}$.

D6 - A *co-tangente* do ângulo α é dada por $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{cateto oposto}}$.

Basta comparar as definições D4, D5 e D6 com as definições D1, D2 e D3 para notar que temos as seguintes relações:

$$\boxed{\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}}, \quad \boxed{\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}}, \quad \boxed{\operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}}.$$

Ex.1: calcule a secante, a co-secante e a co-tangente do ângulo α indicado no triângulo do exemplo 1 da seção anterior.

Solução: $\sec\alpha = \frac{h}{a}$, $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{h}{b}$, $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{a}{b}$.

Ex.2: calcule a secante, a co-secante e a co-tangente do ângulo β indicado no triângulo do exemplo 1 da seção anterior.

Solução: $\sec\beta = \frac{5}{4}$, $\operatorname{cosec}\beta = \frac{5}{3}$, $\operatorname{cotg}\beta = \frac{4}{3}$.

Ex.3: calcule a secante, a co-secante e a co-tangente do ângulo γ indicado no triângulo do exemplo 2 da seção anterior.

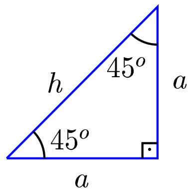
Solução: $\sec\gamma = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$, $\operatorname{cosec}\gamma = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$, $\operatorname{cotg}\gamma = \frac{2}{2} = 1$.

1.6 - Ângulos notáveis

Para alguns ângulos, podemos calcular os valores de seus senos e cossenos (e a partir daí, todos os outros tipos de razões entre lados) por métodos algébricos. Esses ângulos são 45^o, 30^o e 60^o.

a) Ângulo de 45^o.

Consideremos um triângulo retângulo onde dois lados são iguais. Se um dos ângulos tem que ser de 90^o (pois o triângulo é retângulo) e os outros dois têm que ser iguais, conclui-se que cada um deve ser de 45^o.



Se os dois lados iguais têm comprimento a, podemos calcular a medida da hipotenusa usando o Teorema de Pitágoras:

$$h^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow h^2 = 2a^2 \Rightarrow h = \sqrt{2a^2} \Rightarrow h = a\sqrt{2}.$$

Com esses dados, podemos calcular o seno e o cosseno do ângulo de 45^o, obtendo:

$$\operatorname{sen} 45^o = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad \cos 45^o = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Podemos, então, escrever:

$$\boxed{\operatorname{sen} 45^o = \frac{1}{\sqrt{2}}} \; , \quad \boxed{\cos 45^o = \frac{1}{\sqrt{2}}} \; .$$

Ex.1: calcule a tangente, a secante, a co-secante e a co-tangente de 45^o.

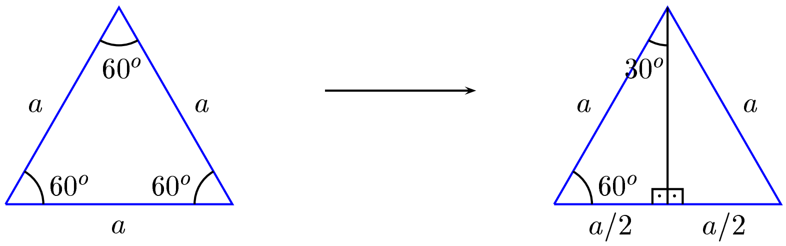
Solução: usamos as identidades entre as razões:

$$\operatorname{tg} 45^o = \frac{\operatorname{sen} 45^o}{\cos 45^o} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{1} = 1 \quad , \quad \sec 45^o = \frac{1}{\cos 45^o} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2} \; ,$$

$$\operatorname{cosec} 45^o = \frac{1}{\operatorname{sen} 45^o} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2} \quad , \quad \operatorname{cotg} 45^o = \frac{1}{\operatorname{tg} 45^o} = 1 \; .$$

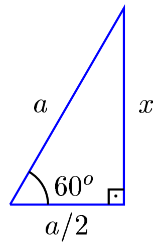
b) Ângulo de 60^o.

Consideremos um triângulo isósceles, isto é, um triângulo cujos lados são todos iguais, como por exemplo o triângulo com todos os lados medindo a da figura abaixo. Os ângulos internos desse triângulo são todos iguais e de 60^o. Tal triângulo não é retângulo. No entanto, podemos produzir um triângulo retângulo dividindo esse triângulo em duas partes iguais, como na figura abaixo. Tomando uma dessas partes, temos um triângulo retângulo com um dos ângulos internos igual a 60^o.



Tomando uma dessas partes, temos um triângulo retângulo com um dos ângulos internos igual a 60^o.

Usando o Teorema de Pitágoras, podemos calcular o lado desconhecido do triânglo:



$$a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + x^2 \Rightarrow a^2 = \frac{a^2}{4} + x^2 \Rightarrow a^2 - \frac{a^2}{4} = x^2 \Rightarrow x^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 = \frac{4a^2 - a^2}{4} \Rightarrow x^2 = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}a}{2}.$$

Agora podemos calcular o seno e o cosseno de 60^o:

$$\operatorname{sen} 60^o = \frac{\frac{\sqrt{3}a}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}a}{2} \cdot \frac{1}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad \cos 60^o = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{2}.$$

Podemos, então, escrever:

$$\boxed{\operatorname{sen} 60^o = \frac{\sqrt{3}}{2}} \; , \quad \boxed{\cos 60^o = \frac{1}{2}} \; .$$

Ex.1: calcule a tangente, a secante, a co-secante e a co-tangente de 60^o.

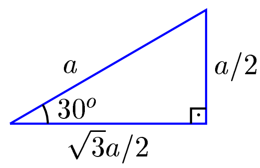
Solução: usamos as identidades entre as razões:

$$\operatorname{tg} 60^o = \frac{\operatorname{sen} 60^o}{\cos 60^o} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{1} = \sqrt{3} \quad , \quad \sec 60^o = \frac{1}{\cos 60^o} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1 \cdot \frac{2}{1} = 2 \; ,$$
$$\operatorname{cosec} 60^o = \frac{1}{\operatorname{sen} 60^o} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 1 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad , \quad \operatorname{cotg} 60^o = \frac{1}{\operatorname{tg} 60^o} = \frac{1}{\sqrt{3}} \; .$$

c) Ângulo de 30^o.

Voltemos, agora, ao triângulo retângulo obtido no item anterior. Esse triângulo tem um ângulo de 90^o, um de 60^o e outro de 30^o.

Com base nos dados obtidos sobre os lados desse triângulo, podemos calcular o seno e o cosseno de 30^o:



$$\operatorname{sen} 30^o = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{2} \quad , \quad \cos 30^o = \frac{\frac{\sqrt{3}a}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}a}{2} \cdot \frac{1}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Podemos, então, escrever:

$$\boxed{\operatorname{sen} 30^o = \frac{1}{2}} \; , \quad \boxed{\cos 30^o = \frac{\sqrt{3}}{2}} \; .$$

Ex.1: calcule a tangente, a secante, a co-secante e a co-tangente de 30^o.

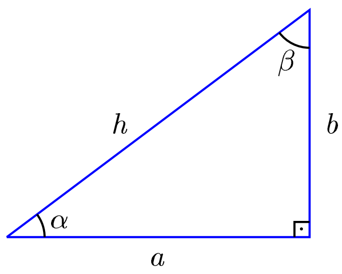
Solução: usamos as identidades entre as razões:

$$\text{tg}\,30^o = \frac{\text{sen}\,30^o}{\cos 30^o} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad , \quad \sec 30^o = \frac{1}{\cos 30^o} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 1\cdot\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \ ,$$

$$\text{cosec}\,30^o = \frac{1}{\text{sen}\,30^o} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1\cdot\frac{2}{1} = 2 \quad , \quad \text{cotg}\,30^o = \frac{1}{\text{tg}\,30^o} = \sqrt{3}\ .$$

1.7 - Relações trigonométricas fundamentais

Vamos, agora, estudar duas relações entre o seno e o cosseno de um ângulo. A primeira delas pode ser verificada a partir do triângulo retângulo representado abaixo. Este tem três ângulos internos, dados por α, β e o ângulo reto (90^o). O seno e o cosseno do ângulo α são dados por



$$\text{sen}\,\alpha = \frac{b}{h} \quad , \quad \cos\alpha = \frac{a}{h}\ ,$$

enquanto o seno e o cosseno do ângulo β são dados por

$$\text{sen}\,\beta = \frac{a}{h} \quad , \quad \cos\beta = \frac{b}{h}\ .$$

Das expressões acima, podemos ver que

$$\text{sen}\,\beta = \cos\alpha \quad , \quad \cos\beta = \text{sen}\,\alpha.$$

Lembremos agora que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180^o. Portanto,

$$\alpha+\beta+90^o = 180^o \Rightarrow \beta = 180^o - \alpha - 90^o \Rightarrow \beta = 90^o - \alpha.$$

Substituindo β por $90^o-\alpha$, obtemos, então, as expressões

$$\boxed{\text{sen}\,(90^o-\alpha) = \cos\alpha \quad , \quad \cos(90^o-\alpha) = \text{sen}\,\alpha}\ ,$$

válida para qualquer ângulo α.

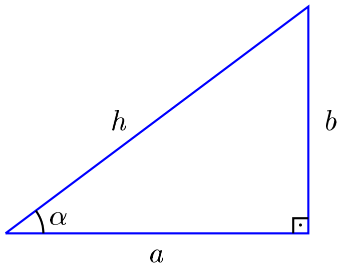
Ex.1: dado que $\text{sen}\,75^0 = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$, calcule $\cos 15^0$.

Solução: $\cos 15^o = \text{sen}\,(90^o-15^o) = \text{sen}\,75^o = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

Ex.2: dado que $\cos 75^o = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$, calcule $\text{sen}\,15^o$.

Solução: $\text{sen}\,15^o = \cos(90^o-15^o) = \cos 75^o = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

A segunda relação é obtida do triângulo ao lado. O cosseno e o seno do ângulo α são dados por



$$\cos\alpha = \frac{b}{h} \quad , \quad \text{sen}\,\alpha = \frac{a}{h}\ .$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras ao mesmo triângulo, temos

$$h^2 = a^2+b^2 \Rightarrow \frac{h^2}{h^2} = \frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{h^2} \Rightarrow 1 = \left(\frac{a}{h}\right)^2+\left(\frac{b}{h}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = (\cos\alpha)^2 + (\text{sen}\,\alpha)^2 \Rightarrow 1 = \cos^2\alpha + \text{sen}^2\,\alpha\ .$$

Com isto, obtemos a seguinte relação de fundamental importância na trigonometria:

$$\boxed{\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1} \,.$$

A seguir, veremos algumas aplicações desta fórmula.

Ex.3: Mostre que $\cos^2 60^o + \operatorname{sen}^2 60^o = 1$.

Solução: temos: $$\cos^2 60^o + \operatorname{sen}^2 60^o = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} = 1 \,.$$

Ex.4: Sabendo que $\cos 30^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$, calcule $\operatorname{sen} 30^o$.

Solução: temos:

$$\cos^2 30^o + \operatorname{sen}^2 30^o = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 30^o = 1 - \cos^2 30^o \Rightarrow \operatorname{sen}^2 30^o = 1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 30^o = 1 - \frac{3}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}^2 30^o = \frac{4-3}{4} \Rightarrow \operatorname{sen}^2 30^o = \frac{1}{4} \Rightarrow \operatorname{sen} 30^o = \sqrt{\frac{1}{4}} \Rightarrow \operatorname{sen} 30^o = \frac{1}{2} \,.$$

A trigonometria no triângulo retângulo nos serviu bem no estudo de ângulos menores que 90^o. No entanto, se quisermos estudar ângulos de graus maiores que estes, temos que recorrer à trigonometria da circunferência, que será o assunto do próximo capítulo.