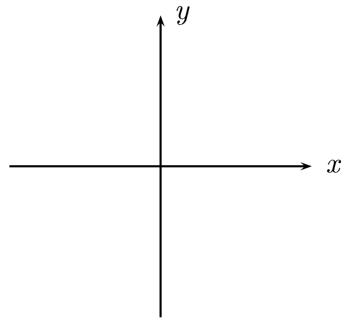
4 - Vetores no plano e no espaço

Em quase todos os ramos da matemática, é mais conveniente trabalharmos com números do que com figuras geométricas. No caso dos vetores, veremos que é mais fácil trabalhar com eles em termos de suas componentes com relação aos eixos coordenados. Neste capítulo, estudaremos as representações dos vetores no plano e no espaço. Também veremos como são definidas as operações vetoriais básicas usando a notação de componentes dos vetores.

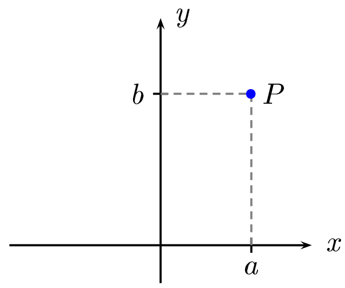
4.1 - Vetores no plano

Um plano infinito pode ser parametrizado estabelecendo-se duas retas ortogonais orientadas, uma na vertical e outra na horizontal. À reta orientada horizontal chamamos *eixo* x e à reta orientada vertical chamamos *eixo* y. Cada um desses eixos será uma cópia da reta dos números reais, escrita como $I\!R$. O plano será, então, o resultado do produto cartesiano (capítulo 2 do curso de Cálculo Diferencial e Integral) entre duas retas dos reais, isto é, $I\!R \times I\!R$, que representamos como $I\!R^2$. Por isso, chamamos este plano de *espaço* $I\!R^2$. O sistema formado pelos dois eixos ortogonais também é chamado de *eixos coordenados* ou *cartesianos*. Usando as coordenadas nestas duas retas, podemos estabelecer posições para quaisquer pontos nesse plano, como veremos a seguir.



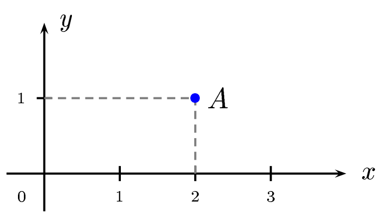
a) Pontos no $I\!R^2$

Podemos representar um ponto P no espaço $I\!R^2$ por meio de um par ordenado (a, b), onde a é a coordenada do ponto com relação ao eixo x e b é a coordenada do ponto com relação ao eixo y, como mostrado na figura ao lado. Um ponto P de cordenadas (a, b) é indicado por $P(a, b)$.



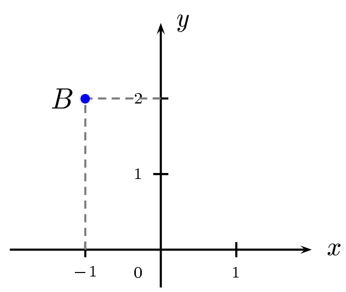
Ex.1: represente o ponto $A(2, 1)$ em um sistema de eixos coordenados.

Solução:



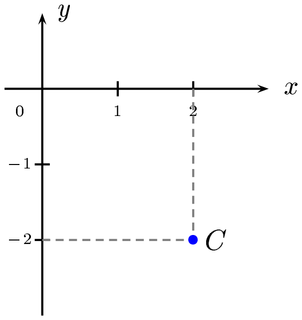
Ex.2: represente o ponto $B(-1, 2)$ em um sistema de eixos coodenados.

Solução:



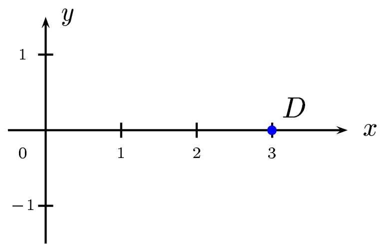
Ex.3: represente o ponto $C(2,-2)$ em um sistema de eixos coordenados .

Solução:



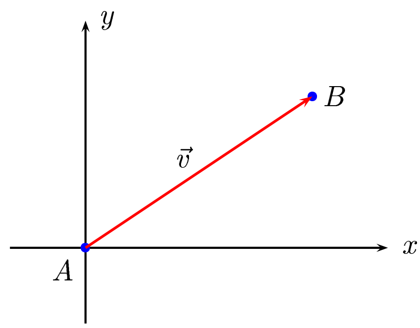
Ex.4: represente o ponto $D(3,0)$ em um sistema de eixos coordenados .

Solução:

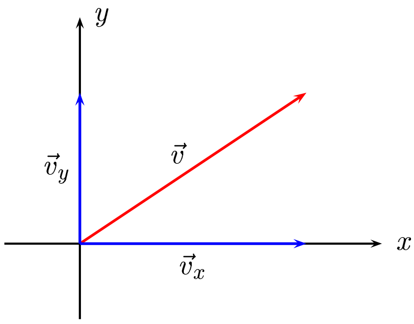


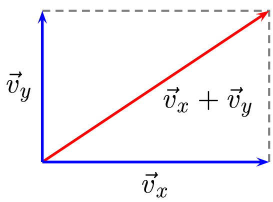
b) Vetores no $\mathbb{R}^2$

Como vimos no capítulo anterior, um vetor é um conjunto de infinitos segmentos orientados equipolentes. Vimos também que qualquer um desses segmentos orientados equipolentes pode representar um vetor. Consideremos agora um sistema de eixos coordenados, como o da figura ao lado. Dado um vetor $\vec{v}$, podemos escolher qualquer representação AB desse vetor. Em particular, podemos escolher um segmento orientado cuja origem esteja na coordenada $(0,0)$ dos eixos coordenados.



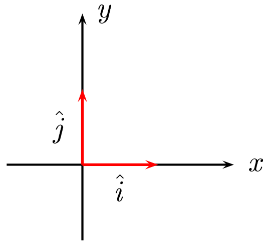
Este vetor pode ser subdividido em dois vetores: um vetor $\vec{v}_x$, paralelo ao eixo x, e um vetor $\vec{v}_y$, paralelo ao eixo y. O vetor $\vec{v}$ será a soma dos dois vetores $\vec{v}_x$ e $\vec{v}_y$, isto é, $\vec{v}=\vec{v}_x+\vec{v}_y$. Isto pode ser visto efetuando a soma desses dois vetores de acordo com o método do paralelogramo.





c) Versores $\hat{\imath}$ e $\hat{\jmath}$

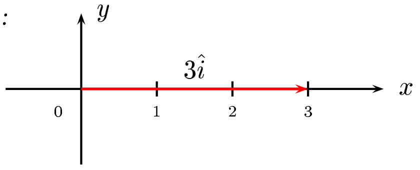
Agora, vamos introduzir dois versores (vetores de módulo igual a 1), que chamaremos $\hat{\imath}$ e $\hat{\jmath}$. O versor $\hat{\imath}$ é paralelo ao eixo x e o versor $\hat{\jmath}$ é paralelo ao eixo y.



Dado o versor $\hat{\imath}$, podemos representar qualquer vetor paralelo ao eixo x como um produto $k\hat{\imath}$, $k\in\mathbb{R}$, como exemplificado a seguir.

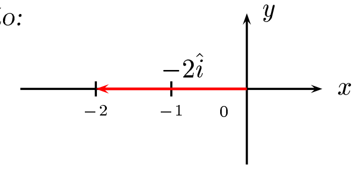
Ex.1: represente no plano cartesiano o vetor $3\hat{\imath}$.

Solução:



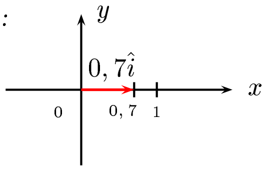
Ex.2: represente no plano cartesiano o vetor $-2\hat{\imath}$.

Solução:



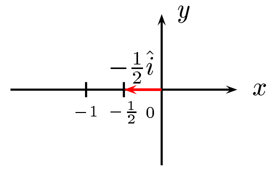
Ex.3: represente no plano cartesiano o vetor $0,7\hat{\imath}$.

Solução:



Ex.4: represente no plano cartesiano o vetor $-\frac{1}{2}\hat{\imath}$.

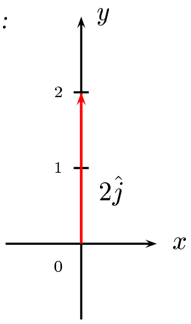
Solução:



De modo similar, dado o versor $\hat{\jmath}$, podemos representar qualquer vetor paralelo ao eixo y como um produto $k\hat{\jmath}$, $k \in I\!R$.

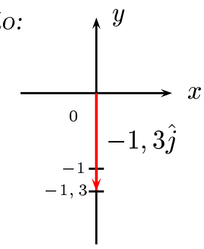
Ex.5: represente no plano cartesiano o vetor $2\hat{\jmath}$.

Solução:



Ex.6: represente no plano cartesiano o vetor $-1.3\hat{\jmath}$.

Solução:



d) Vetores em termos de suas componentes

Voltemos, agora, ao vetor $\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$. Podemos representar o vetor $\vec{v}_x$ como sendo o produto $|\vec{v}_x|\hat{\imath}$, isto é,

$$\vec{v}_x = |\vec{v}_x|\hat{\imath}.$$

De modo semelhante, podemos representar o vetor $\vec{v}_y$ como sendo o produto $|\vec{v}_y|\hat{\jmath}$, isto é,

$$\vec{v}_y = |\vec{v}_y|\hat{\jmath}.$$

O vetor $\vec{v}$ pode, então, ser escrito como

$$\vec{v} = |\vec{v}_x|\hat{\imath} + |\vec{v}_y|\hat{\jmath}.$$

Para simplificar a notação, escrevemos

$$|\vec{v}_x| = v_x \text{ e } |\vec{v}_y| = v_y,$$

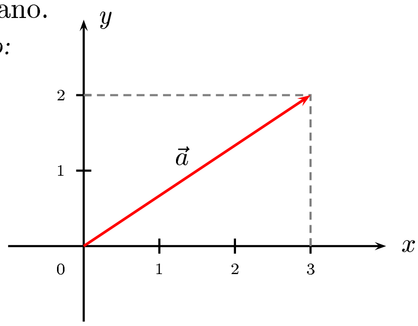
de modo que temos

$$\boxed{\vec{v} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath}.}$$

Dividindo um vetor em suas componentes e escrevendo-o em termos dos versores $\hat{\imath}$ e $\hat{\jmath}$, podemos representar qualquer vetor apenas especificando os módulos das suas componentes: v_x e v_y. Isto facilita sobremaneira a representação de vetores, que agora podem ser escritos em termos de números.

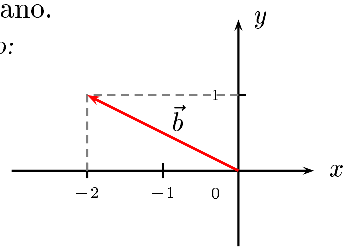
Ex.1: represente o vetor $\vec{a} = 3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$ no plano cartesiano.

Solução:



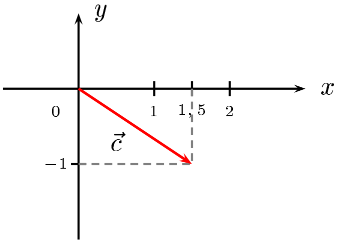
Ex.2: represente o vetor $\vec{b} = -2\hat{\imath} + \hat{\jmath}$ no plano cartesiano.

Solução:



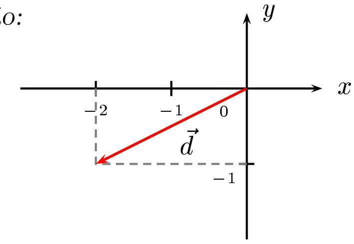
Ex.3: represente o vetor $\vec{c} = 1,5\hat{\imath} - \hat{\jmath}$ no plano cartesiano.

Solução:



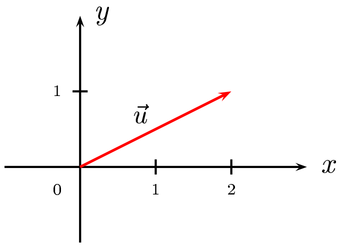
Ex.4: represente o vetor $\vec{d} = -2\hat{\imath} - \hat{\jmath}$ no plano cartesiano.

Solução:



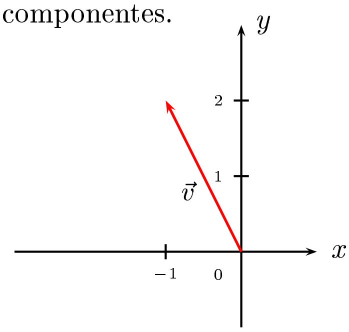
De forma semelhante, podemos facilmente representar vetores no plano em termos de suas componentes.

Ex.5: escreva o vetor abaixo em termos de suas componentes.



Solução: $\vec{u} = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath}$.

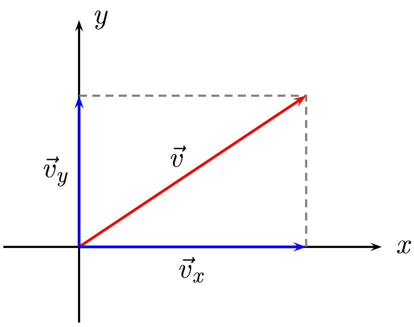
Ex.6: escreva o vetor abaixo em termos de suas componentes.

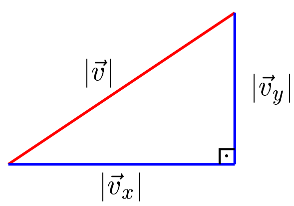


Solução: $\vec{v} = -\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$.

e) Módulo

Para conseguirmos o módulo de um vetor em termos de suas componentes, lançamos mão do Teorema de Pitágoras. Observando um vetor $\vec{v}$ e suas componentes, podemos desenhar um triângulo tal que sua hipotenusa tem o valor do módulo de $\vec{v}$, que escrevemos $|\vec{v}|$, sendo os seus catetos dados pelos módulos de suas componentes.





Temos, então,

$$|\vec{v}|^2 = v_x^2 + v_y^2 \Rightarrow |\vec{v}| = \pm\sqrt{v_x^2 + v_y^2}.$$

Como somente um valor positivo é admissível para um módulo, temos, então,

$$\boxed{|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}.}$$

Obs.: também podemos escrever $|\vec{v}| = v$, de modo que

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}.$$

Ex.1: calcule o módulo do vetor $\vec{v} = 2\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}$.

Solução: $|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16} =$
$= \sqrt{20} = \sqrt{2^2.5} = 2\sqrt{5}$.

Ex.2: calcule o módulo do vetor $\vec{v} = 3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}$.

Solução: $|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$.

Ex.3: calcule o módulo do vetor $\vec{v} = -3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$.

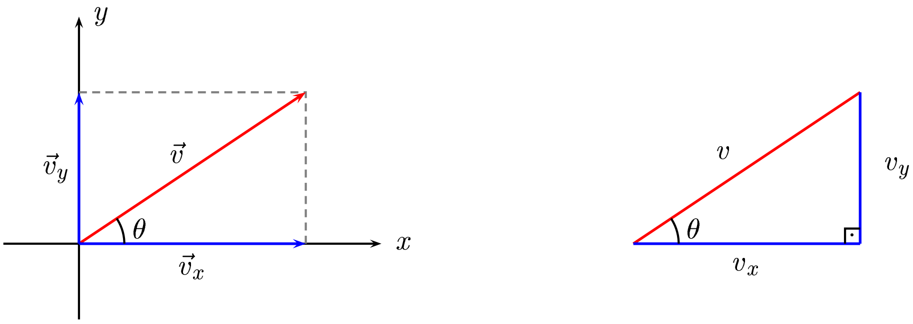
Solução: $|\vec{v}| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$.

Ex.4: calcule o módulo do vetor $\vec{v} = 2\hat{\jmath}$.

Solução: $|\vec{v}| = \sqrt{0^2 + 2^2} = \sqrt{0 + 4} = \sqrt{4} = 2$.

f) Vetores definidos por seus módulos e ângulos de inclinação

Muitas vezes conhecemos o módulo e um ângulo de inclinação de vetores. Para representá-los em termos de componentes, precisamos utilizar as ferramentas da trigonometria. Consideremos um vetor no plano, com módulo $v = |\vec{v}|$ e ângulo de inclinação θ. O vetor e suas componentes formam um triângulo retângulo onde um dos ângulos internos é θ, como na figura abaixo.



Usando a definição do cosseno desse ângulo, temos

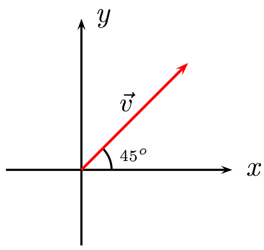
$$\cos\theta = \frac{v_x}{v} \Rightarrow v\cos\theta = v_x \Rightarrow v_x = v\cos\theta\ .$$

Portanto, conhecendo θ e v, podemos calcular v_x. De forma semelhante, usando a definição do seno do ângulo, temos

$$\text{sen}\ \theta = \frac{v_y}{v} \Rightarrow v\text{sen}\ \theta = v_y \Rightarrow v_y = v\text{sen}\ \theta\ .$$

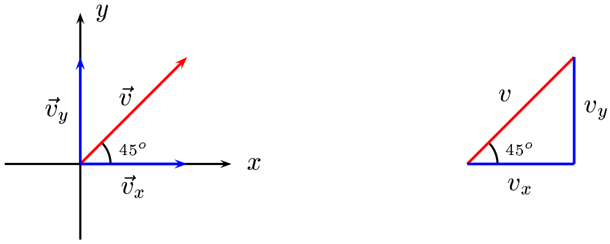
Assim, pudemos calcular as componentes do vetor sabendo o seu módulo e o seu ângulo de inclinação. A seguir, mostramos alguns exemplos de cálculo desse tipo.

Ex.1: escreva o vetor abaixo em termos de suas componentes.



$|\vec{v}| = 2$

Solução: temos o ângulo de inclinação e o módulo do vetor. A partir disto podemos calcular suas componentes do modo seguinte. O vetor e suas componentes formam um triângulo retângulo, cuja hipotenusa é $|\vec{v}|$ e cujos catetos são $|\vec{v}_x|$ e $\vec{v}_y|$. Como o seno e o cosseno do ângulo são conhecidos, podemos calcular os valores dos módulos das duas componentes do vetor.



Dado o ângulo acima, temos da definição do cosseno que

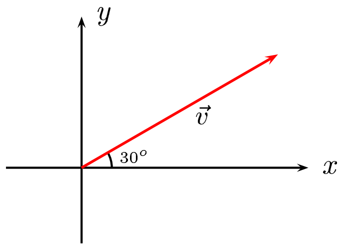
$$\cos 45^o = \frac{v_x}{v} \Rightarrow v.\cos 45^o = v_x \Rightarrow v_x = v.\cos 45^o \Rightarrow v_x = 2.\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow v_x = \frac{2}{\sqrt{2}} \Rightarrow v_x = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}.\sqrt{2}} \Rightarrow v_x = \frac{2\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow v_x = \sqrt{2}\ .$$

De modo semelhante, da definição do seno, obtemos

$$\text{sen } 45^o = \frac{v_y}{v} \Rightarrow v.\text{sen } 45^o = v_y \Rightarrow v_y = v.\text{sen } 45^o \Rightarrow v_y = 2.\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow v_y = \frac{2}{\sqrt{2}} \Rightarrow v_y = \sqrt{2}\ .$$

Conseguimos, então, calcular as componentes do vetor $\vec{v}$. Portanto, podemos escrever $\vec{v} = \sqrt{2}\,\hat{\imath} + \sqrt{2}\,\hat{\jmath}$.

Ex.2: escreva o vetor abaixo em termos de suas componentes.



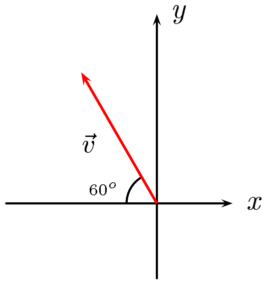
$|\vec{v}| = 3$

Solução: novamente, vamos aplicar as definições do seno e do cosseno do ângulo em questão:

$$\cos 30^o = \frac{v_x}{v} \Rightarrow v.\cos 30^o = v_x \Rightarrow v_x = v.\cos 30^o \Rightarrow v_x = 3\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow v_x = \frac{3\sqrt{3}}{2}\ ,$$
$$\text{sen } 30^o = \frac{v_y}{v} \Rightarrow v.\text{sen } 30^o = v_y \Rightarrow v_y = v.\text{sen } 30^o \Rightarrow v_y = 3\frac{1}{2} \Rightarrow v_y = \frac{3}{2}\ .$$

Calculadas as componentes, podemos escrever $\vec{v} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\hat{\imath} + \frac{3}{2}\hat{\jmath}$.

Ex.3: escreva o vetor abaixo em termos de suas componentes.



$|\vec{v}| = 2$

Solução: aqui, é bom lembrarmos que o ângulo do vetor com relação ao eixo x é $180^o - 60^o = 120^o$. É com este ângulo que devemos trabalhar.

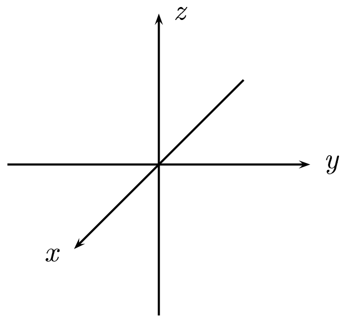
$$\cos 120^o = \frac{v_x}{v} \Rightarrow v.\cos 120^o = v_x \Rightarrow v_x = v.\cos 120^o \Rightarrow v_x = 2\left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow v_x = -1\ ,$$

$$\text{sen } 120^o = \frac{v_y}{v} \Rightarrow v.\text{sen } 120^o = v_y \Rightarrow v_y = v.\text{sen } 120^o \Rightarrow v_y = 2\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow v_y = \sqrt{3}\ .$$

Portanto, $\vec{v} = -\hat{\imath} + \sqrt{3}\,\hat{\jmath}$.

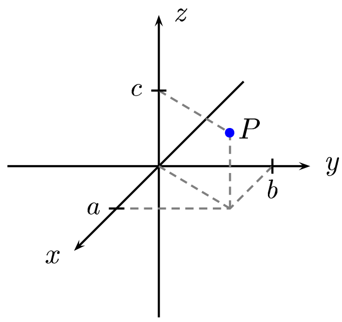
4.2 - Vetores no espaço

O espaço pode ser parametrizado estabelecendo-se três retas ortogonais orientadas, representando as suas três dimensões. Damos a essas retas orientadas os nomes de eixo x, eixo y e eixo z. Cada um desses eixos é uma cópia da reta dos números reais, de modo que o espaço será, então, o resultado do produto entre três retas dos reais, isto é, $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, que representamos como $\mathbb{R}^3$. Por isso, este é chamado de *espaço* $\mathbb{R}^3$. O sistema formado pelos dois eixos ortogonais também é chamado de *eixos coordenados* ou *cartesianos*. Usando as coordenadas nas três retas, podemos estabelecer posições para quaisquer pontos no espaço. Ao lado, temos a representação mais comum dos eixos coordenados. Note que, para que pudéssemos visualizar todos os eixos, foi necessário incliná-los e rotacioná-los um pouco.

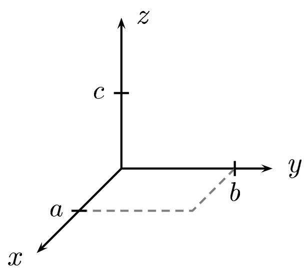


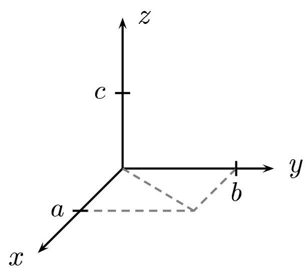
a) Pontos no $\mathbb{R}^3$

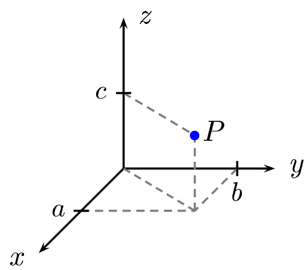
Podemos representar um ponto P no espaço $\mathbb{R}^3$ por meio de uma terna ordenada (a, b, c), onde a é a coordenada do ponto com relação ao eixo x, b é a coordenada do ponto com relação ao eixo y e c é a coordenada do ponto com relação ao eixo z, como mostrado na figura ao lado. Um ponto P de cordenadas (a, b, c) é indicado por $P(a, b, c)$.



Para localizarmos um ponto $P(a, b, c)$ no espaço, podemos seguir a seguinte seqüência: primeiro, encontramos o ponto de intersecção da coordenada a do eixo x com a coordenada b do eixo y. Isto se faz traçando uma reta paralela ao eixo y partindo da posição $x = a$ e uma reta paralela ao eixo x partindo da posição $y = b$. O ponto de intersecção é o ponto onde essas duas retas se cruzam. Encontrado este ponto, traçamos a diagonal do paralelogramo formado por essas duas retas, indo do ponto $(0, 0, 0)$ até o ponto $(a, b, 0)$. Depois, partindo da posição $z = c$, traçamos uma reta paralela a essa diagonal. Do ponto $(a, b, 0)$, traçamos uma reta paralela ao eixo z. O ponto de intersecção dessas duas retas será a posição do ponto $P(a, b, c)$. Esta seqüência é ilustrada nas figuras abaixo.



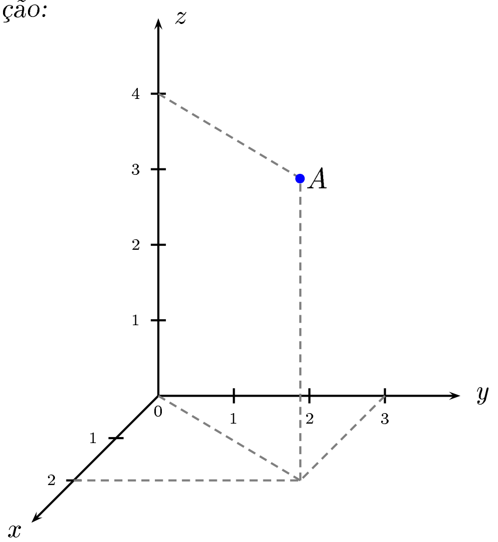




A seguir, temos alguns exemplos de representação de pontos no espaço utilizando essa técnica. Note o seguinte: para que pudéssemos representar um sistema de eixos tridimensional em duas dimensões (a folha de papel), tivemos que inclinar e rodar os eixos de forma que todos estejam visíveis. Por isso, quando formos medir a coordenada x, uma unidade terá que ser multiplicada por uma escala de aproximadamente 0,8 quando olhamos os eixos desta perspectiva.

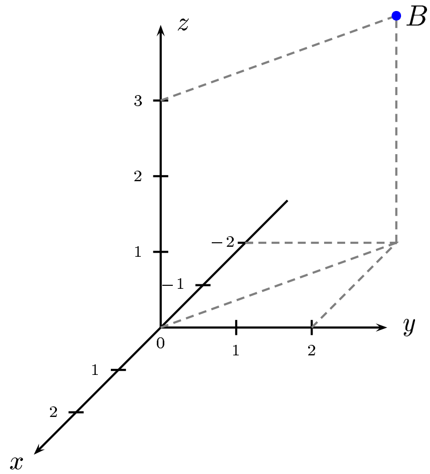
Ex.1: represente o ponto $A(2,3,4)$ em um sistema de eixos coordenados.

Solução:



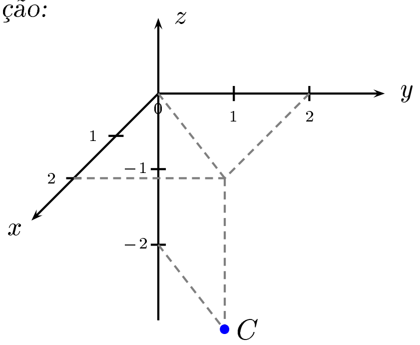
Ex.2: represente o ponto $B(-1,2,3)$ em um sistema de eixos coodenados.

Solução:



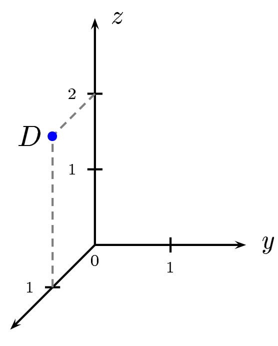
Ex.3: represente o ponto $C(2,2,-2)$ em um sistema de eixos coordenados.

Solução:



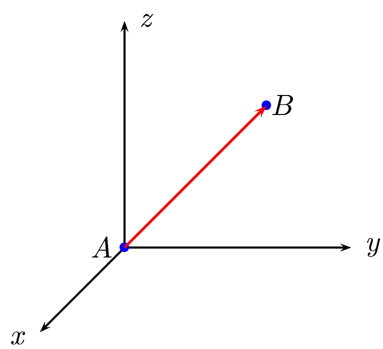
Ex.4: represente o ponto $D(1,0,2)$ em um sistema de eixos coordenados.

Solução:

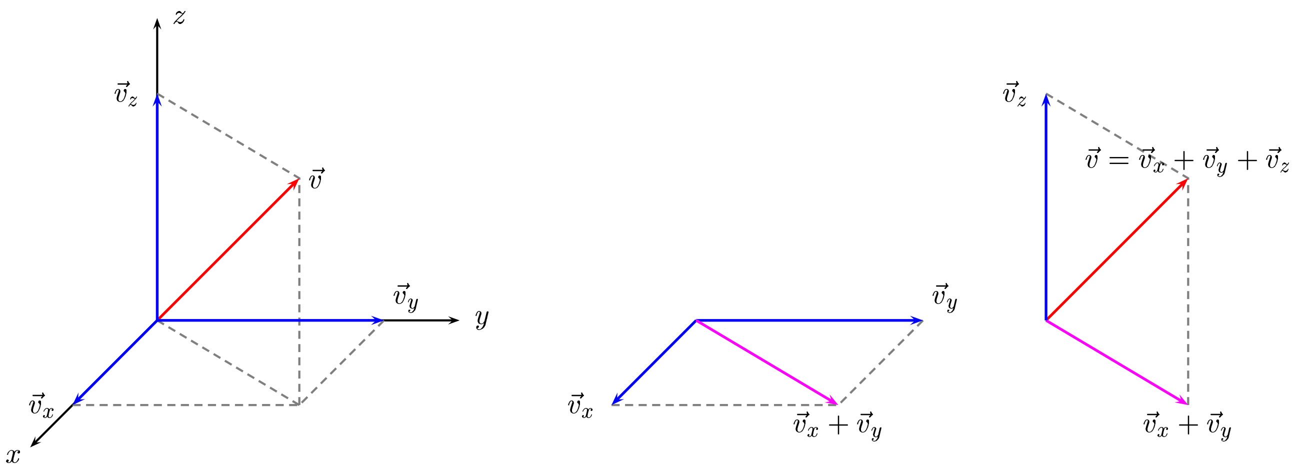


b) Vetores no $\mathbb{R}^3$

De modo semelhante ao visto no caso do espaço $\mathbb{R}^2$, dado um vetor $\vec{v}$ no espaço $\mathbb{R}^3$, podemos escolher qualquer representação AB desse vetor. Em particular, podemos escolher um segmento orientado cuja origem esteja na coordenada $(0,0,0)$ dos eixos coordenados.

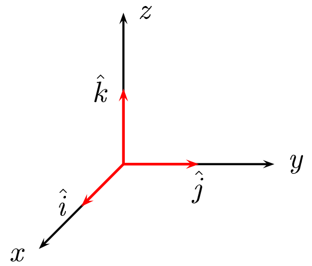


Esse vetor pode ser subdividido em três vetores: um vetor $\vec{v}_x$, paralelo ao eixo x, um vetor $\vec{v}_y$, paralelo ao eixo y e um vetor $\vec{v}_z$, paralelo ao eixo z. O vetor $\vec{v}$ será a soma dos três vetores, isto é, $\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z$. Isto pode ser visto da seguinte forma: primeiro efetuamos a soma dos vetores $\vec{v}_x$ e $\vec{v}_y$ de acordo com o método do paralelogramo (figura a seguir). Depois, somamos o vetor resultante, $\vec{v}_x + \vec{v}_y$, ao vetor $\vec{v}_z$, também usando o método do paralelogramo.



c) Versores $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ e $\hat{k}$

Agora, vamos introduzir um outro versor além dos versores $\hat{\imath}$ e $\hat{\jmath}$. O versor $\hat{k}$, que é paralelo ao eixo z. Dado o versor $\hat{k}$, podemos representar qualquer vetor paralelo ao eixo z como um produto $c\hat{k}$, $c \in I\!R$.



d) Vetores em termos de suas componentes

Usando os versores $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ e $\hat{k}$, podemos representar o vetor $\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z$ da seguinte forma:

$$\vec{v} = |\vec{v}_x|\hat{\imath} + |\vec{v}_y|\hat{\jmath} + |\vec{v}_z|\hat{k}.$$

Para simplificar a notação, escrevemos

$$|\vec{v}_x| = v_x,\ |\vec{v}_y| = v_y \text{ e } |\vec{v}_z| = v_z,$$

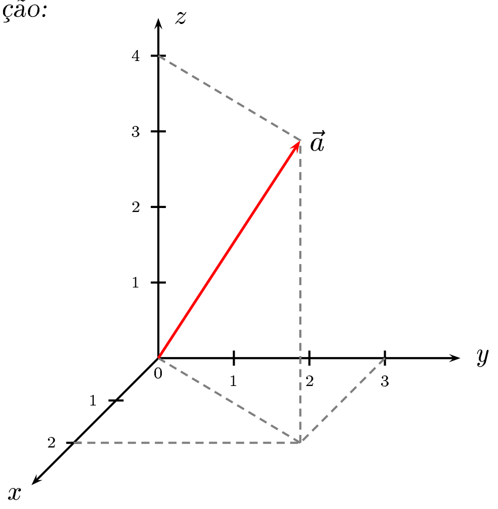
de modo que temos

$$\boxed{\vec{v} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} + v_z\hat{k}.}$$

Dividindo um vetor em suas componentes e escrevendo-o em termos dos versores $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ e $\hat{k}$, podemos representar qualquer vetor apenas especificando os módulos das suas componentes, de modo semelhante ao feito para o caso dos vetores no plano.

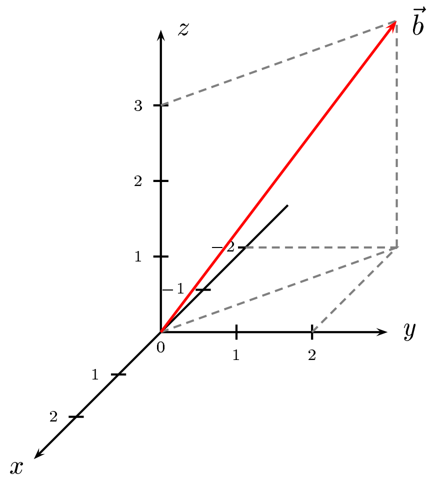
Ex.1: represente o vetor $\vec{a} = 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 4\hat{k}$ em um sistema de eixos coordenados.

Solução:



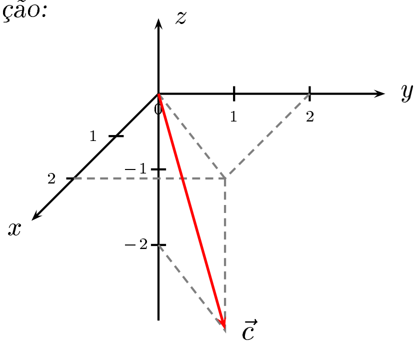
Ex.2: represente o vetor $\vec{b} = -\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 3\hat{k}$ em um sistema de eixos coodenados.

Solução:



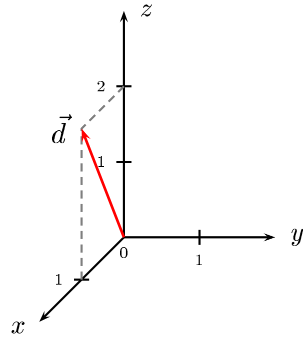
Ex.3: represente o vetor $\vec{c} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$ em um sistema de eixos coordenados.

Solução:



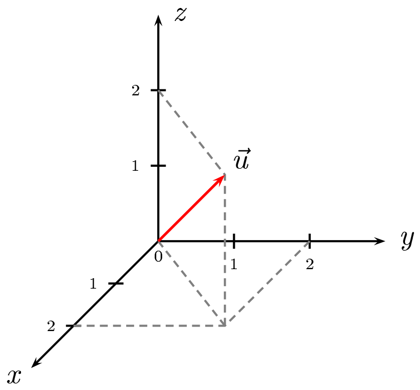
Ex.4: represente o vetor $\vec{d} = \hat{i} + 2\hat{k}$ em um sistema de eixos coordenados.

Solução:



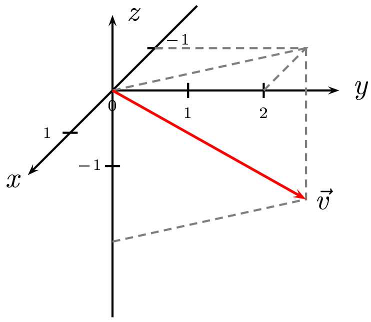
De forma semelhante, podemos facilmente representar vetores no espaço em termos de suas componentes.

Ex.5: escreva o vetor abaixo em termos de suas componentes.



Solução: $\vec{u} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$.

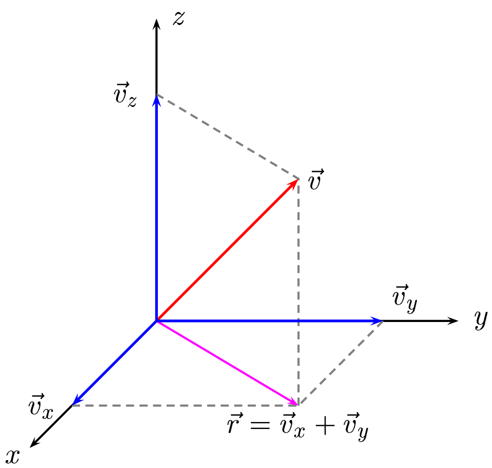
Ex.6: escreva o vetor abaixo em termos de suas componentes.

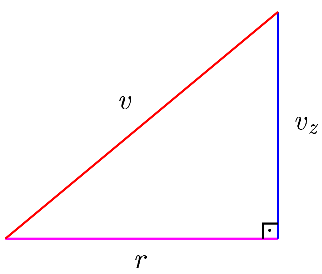


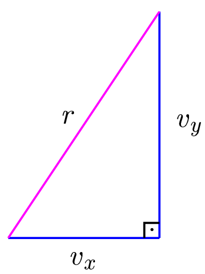
Solução: $\vec{v} = -\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$.

e) Módulo

O módulo de um vetor no espaço pode ser encontrado aplicando o Teorema de Pitágoras duas vezes. Primeiro, consideremos o triângulo formado pelos vetores $\vec{v}$, $\vec{v}_z$ e $\vec{v}_x + \vec{v}_y$. Com o fim de simplificar a notação, vamos definir o vetor resultante $\vec{r} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$ e chamaremos seu módulo de r $(r = |\vec{r}|)$.







De acordo com o Teorema de Pitágoras, temos

$$|\vec{v}|^2 = r^2 + v_z^2.$$

Agora, temos que determinar r. Isto se faz tomando o triângulo formado pelos vetores $\vec{v}_x + \vec{v}_y$, $\vec{v}_x$ e $\vec{v}_y$. De acordo com o teorema de Pitágoras, temos

$$r^2 = v_x^2 + v_y^2.$$

Juntando as duas fórmulas, temos, então, que

$$|\vec{v}|^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \Rightarrow v = \pm\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

Como somente um valor positivo é admissível para um módulo, temos, então,

$$\boxed{|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.}$$

Ex.1: calcule o módulo do vetor $\vec{v} = 2\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + 3\hat{k}$.

Solução: $|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 16 + 9} = \sqrt{29}$.

Ex.2: calcule o módulo do vetor $\vec{v} = 3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + \hat{k}$.

Solução: $|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{9 + 16 + 1} = \sqrt{26}$.

Ex.3: calcule o módulo do vetor $\vec{v} = -3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 2\hat{k}$.

Solução: $|\vec{v}| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{9 + 4 + 4} = \sqrt{17}$.

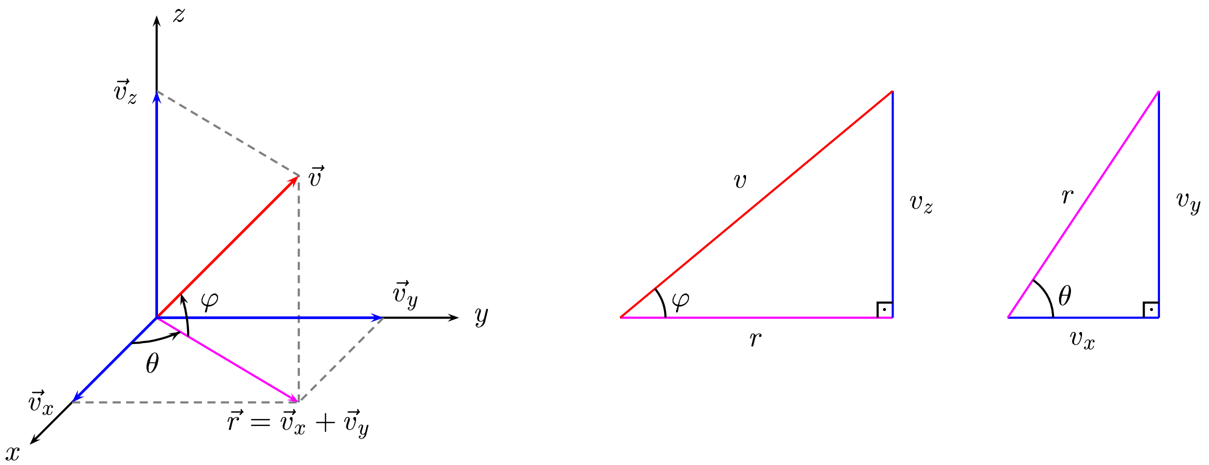
Ex.4: calcule o módulo do vetor $\vec{v} = 3\hat{\imath} - 4\hat{k}$.

Solução: $|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + 0^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$.

f) Vetores definidos por seus módulos, ângulos de inclinação e ângulos azimutais

Em diversas aplicações em Astronomia e outras áreas, temos que determinar as componentes de um vetor tendo conhecimento de seu módulo, de seu ângulo de inclinação, representado por φ, e seu ângulo de azimute, representado por θ. O ângulo θ é medido a partir do eixo x e o ângulo φ é medido a partir do vetor resultante $\vec{r}$.

Na figura abaixo, podemos considerar dois triângulos retângulos formados pelas diversas componentes. O primeiro é formado pelas componentes v, v_z e r e tem um dos ângulos internos dado por φ. O segundo é formado pelas componentes r, v_x e v_y e tem um dos ângulos internos igual a θ.



Para calcularmos as componentes v_z e r usamos o cosseno e o seno do ângulo φ.

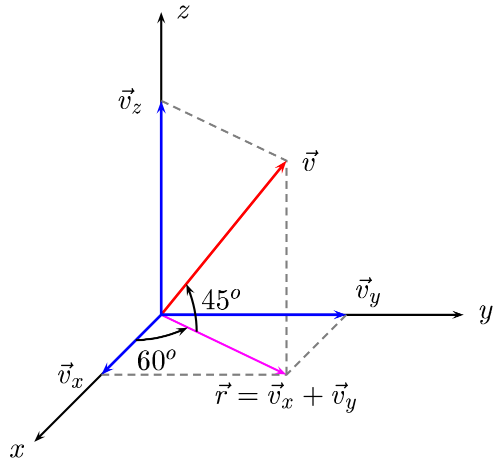
$$\cos\varphi = \frac{v_z}{v} \Rightarrow v\cos\varphi = v_z \Rightarrow v_z = v\cos\varphi\ ,$$
$$\text{sen}\ \varphi = \frac{r}{v} \Rightarrow v\text{sen}\ \varphi = r \Rightarrow r = v\text{sen}\ \varphi\ .$$

Uma vez conhecido o valor de r, podemos calcularmos v_x e v_y usando o cosseno e o seno do ângulo θ.

$$\cos\theta = \frac{v_x}{r} \Rightarrow r\cos\theta = v_x \Rightarrow v_x = r\cos\theta \ ,$$
$$\text{sen } \theta = \frac{v_y}{r} \Rightarrow r\text{sen } \theta = v_y \Rightarrow v_y = r\text{sen } \theta \ .$$

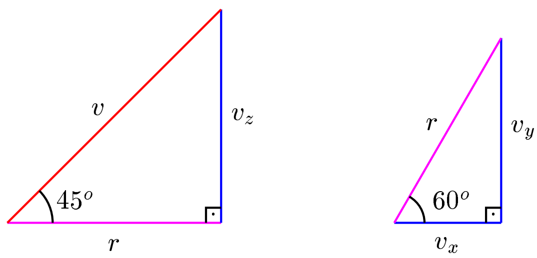
Este procedimento é ilustrado nos exemplos a seguir.

Ex.1: escreva o vetor abaixo em termos de suas componentes.



$|\vec{v}| = 4$

Solução: temos o ângulo de inclinação, o ângulo de azimute e o módulo do vetor. A partir disto podemos calcular suas componentes da maneira feita a seguir. Consideremos os dois triângulos retângulos formados por componentes do vetor $\vec{v}$ (figuras abaixo).



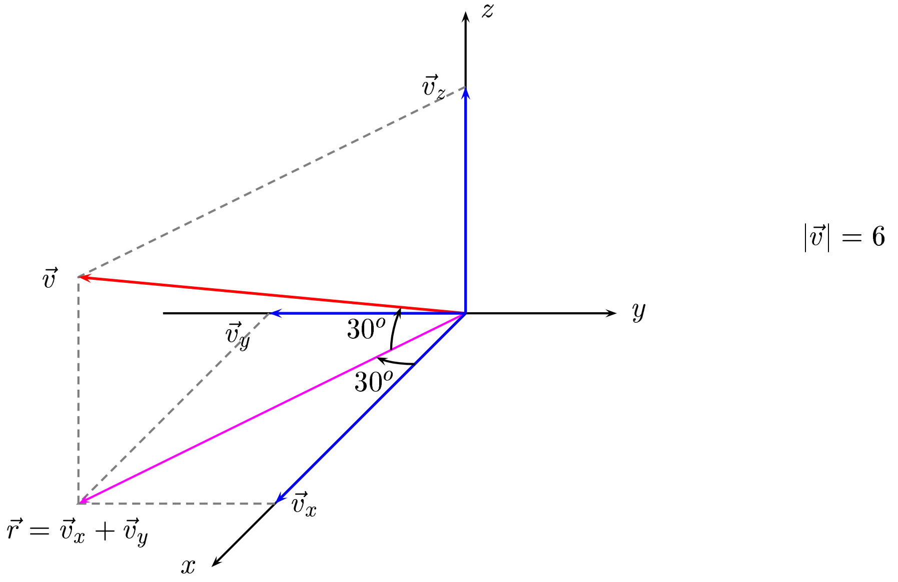
Primeiro, usamos o ângulo de inclinação para calcular os módulos do vetor $\vec{v}_z$ e do vetor resultante $\vec{r} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$.

$$\cos 45^o = \frac{r}{v} \Rightarrow v.\cos 45^o = r \Rightarrow r = v.\cos 45^o \Rightarrow r = 4.\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow r = \frac{4}{\sqrt{2}} \Rightarrow r = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}.\sqrt{2}} \Rightarrow r = \frac{4\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow r = 2\sqrt{2} \ ,$$
$$\text{sen } 45^o = \frac{v_z}{v} \Rightarrow v.\text{sen } 45^o = v_z \Rightarrow v_z = v.\text{sen } 45^o \Rightarrow v_z = 4.\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow v_z = 2\sqrt{2} \ .$$

Depois, usamos o ângulo de azimute para calcular os módulos dos vetores $\vec{v}_x$ e $\vec{v}_y$.

$$\cos 60^o = \frac{v_x}{r} \Rightarrow r.\cos 60^o = v_x \Rightarrow v_x = r.\cos 60^o \Rightarrow v_x = 2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow v_x = \sqrt{2} \ ,$$
$$\text{sen } 60^o = \frac{v_y}{r} \Rightarrow r.\text{sen } 60^o = v_y \Rightarrow v_y = r.\text{sen } 60^o \Rightarrow v_y = 2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow v_y = \sqrt{2.3} \Rightarrow v_y = \sqrt{6} \ .$$

Ex.2: escreva o vetor abaixo em termos de suas componentes.



Solução: novamente, usamos o ângulo de inclinação para calcular os módulos do vetor $\vec{v}_z$ e do vetor resultante $\vec{r}$.

$$\cos 30^o = \frac{r}{v} \Rightarrow v.\cos 30^o = r \Rightarrow r = v.\cos 30^o \Rightarrow r = 6.\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow r = 3\sqrt{3}\ ,$$
$$\text{sen } 30^o = \frac{v_z}{v} \Rightarrow v.\text{sen } 30^o = v_z \Rightarrow v_z = v.\text{sen } 30^o \Rightarrow v_z = 6.\frac{1}{2} \Rightarrow v_z = 3\ .$$

Da figura, podemos ver que o ângulo azimutal vai no sentido horário. Portanto, devemos usar o ângulo -30^o para calcular os módulos dos vetores $\vec{v}_x$ e $\vec{v}_y$.

$$\cos 30^o = \frac{v_x}{r} \Rightarrow r.\cos 30^o = v_x \Rightarrow v_x = r.\cos 30^o \Rightarrow v_x = 3\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow v_x = \frac{3.3}{2} \Rightarrow v_x = \frac{9}{2}\ ,$$
$$\text{sen } 30^o = \frac{v_y}{r} \Rightarrow r.\text{sen } 30^o = v_y \Rightarrow v_y = r.\text{sen } 30^o \Rightarrow v_y = 3\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow v_y = \frac{3\sqrt{3}}{2}\ .$$

4.3 - Soma de vetores

A soma de vetores em termos de componentes é bastante simples. Dados dois vetores, $\vec{u} = u_x\hat{\imath} + u_y\hat{\jmath} + u_z\hat{k}$ e $\vec{v} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} + v_z\hat{k}$, a soma entre eles é dada por

$$\begin{aligned}\vec{u} + \vec{v} &= (u_x\hat{\imath} + u_y\hat{\jmath} + u_z\hat{k}) + \left(v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} + v_z\hat{k}\right) = u_x\hat{\imath} + u_y\hat{\jmath} + u_z\hat{k} + v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} + v_z\hat{k} = \\ &= (u_x + v_x)\hat{\imath} + (u_y + v_y)\hat{\jmath} + (u_z + v_z)\hat{k}.\end{aligned}$$

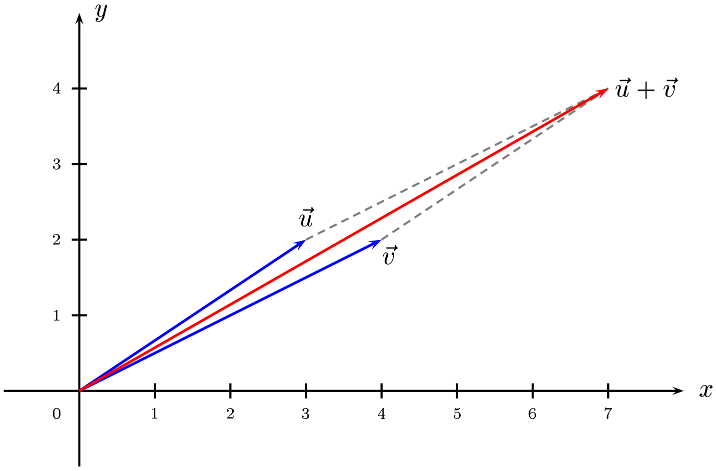
Portanto, podemos escrever

$$\boxed{\vec{u} + \vec{v} = (u_x + v_x)\hat{\imath} + (u_y + v_y)\hat{\jmath} + (u_z + v_z)\hat{k}.}$$

Ex.1: calcule a soma dos vetores $\vec{u} = 3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$ e $\vec{v} = 4\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$. Esboce os vetores e sua soma em um gráfico.

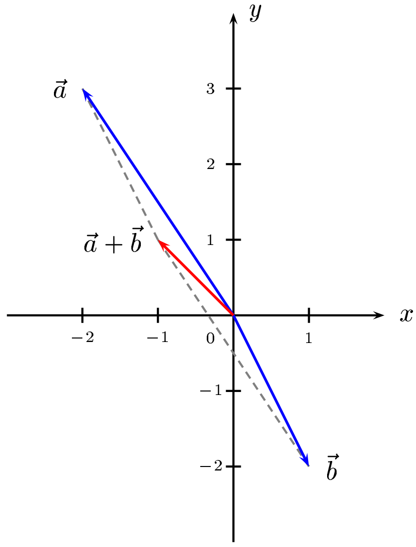
Solução: $\vec{u} + \vec{v} = (3 + 4)\hat{\imath} + (2 + 2)\hat{\jmath} = 7\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}$.

A seguir, fazemos a representação gráfica dos vetores e sua soma.



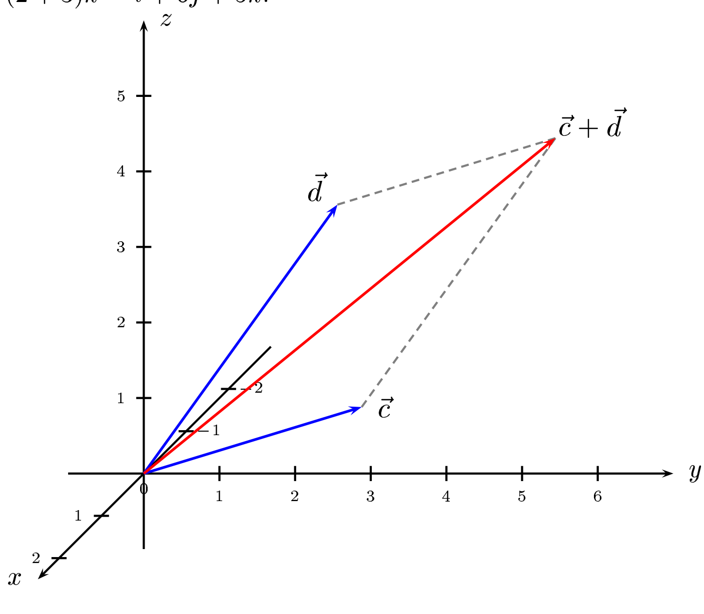
Ex.2: calcule a soma dos vetores $\vec{a} = -2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$ e $\vec{b} = \hat{\imath} - 2\hat{\jmath}$. Esboce os vetores e sua soma em um gráfico.

Solução: $\vec{a} + \vec{b} = (-2+1)\hat{\imath} + (3-2)\hat{\jmath} = -\hat{\imath} + \hat{\jmath}$.



Ex.3: calcule a soma dos vetores $\vec{c} = 2\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + 2\hat{k}$ e $\vec{d} = -\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 3\hat{k}$. Esboce os vetores e sua soma em um gráfico.

Solução: $\vec{c} + \vec{d} = (2-1)\hat{\imath} + (4+2)\hat{\jmath} + (2+3)\hat{k} = \hat{\imath} + 6\hat{\jmath} + 5\hat{k}$.



Quando somamos vetores em termos de suas componentes, não é preciso visualizá-los por meio de gráficos. Estes foram pedidos nos exemplos acima com a finalidade de reforçar que a soma em termos de componentes funciona. Utilizando a notação de componentes, podemos executar somas vetoriais sem a necessidade de gráficos.

Ex.4: calcule a soma dos vetores $\vec{e} = \hat{i} - 3\hat{j} + 3\hat{k}$ e $\vec{f} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$.

Solução: $\vec{e} + \vec{f} = (1+3)\hat{i} + (-3-2)\hat{j} + (3+3)\hat{k} = 4\hat{i} - 5\hat{j} + 6\hat{k}$.

Ex.5: calcule a soma dos vetores $\vec{g} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k}$ e $\vec{h} = -3\hat{i} + 4\hat{j} - 3\hat{k}$.

Solução: $\vec{g} + \vec{h} = (2-3)\hat{i} + (-2+4)\hat{j} + (6-3)\hat{k} = -\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$.

4.4 - Produto de um vetor por um escalar

O produto de um vetor $\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}$ por um número (escalar) $k \in I\!R$ é dado por

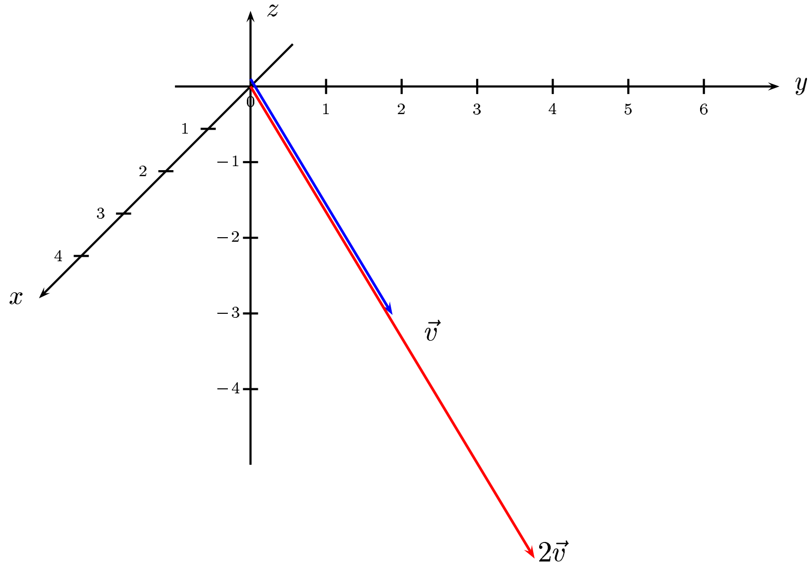
$$k\vec{v} = k(v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}) = kv_x\hat{i} + kv_y\hat{j} + kv_z\hat{k}.$$

Temos, então,

$$\boxed{k\vec{v} = kv_x\hat{i} + kv_y\hat{j} + kv_z\hat{k}.}$$

Ex.1: dado o vetor $\vec{v} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$, calcule $2\vec{v}$. Esboce os dois vetores em um gráfico.

Solução: $2\vec{v} = 2.2\hat{i} + 2.3\hat{j} + 2.(-2)\hat{k} = 4\hat{i} + 6\hat{j} - 4\hat{k}$.



Ex.2: dado o vetor $\vec{a} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$, calcule $-\vec{a}$.

Solução: $-\vec{v} = -3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$.

Ex.3: dado o vetor $\vec{b} = 4\hat{i} - 3\hat{k}$, calcule $-3\vec{b}$.

Solução: $-3\vec{b} = -12\hat{i} + 9\hat{k}$.

Podemos usar as duas operações, o produto de um vetor por um escalar e a soma de vetores, em conjunto, como nos exemplos a seguir.

Ex.4: dados os vetores $\vec{u} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ e $\vec{v} = -3\hat{i} + 4\hat{j} - 4\hat{k}$, calcule $3\vec{u} + 2\vec{v}$.

Solução:
$$\begin{aligned} 3\vec{u} + 2\vec{v} &= 3(2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}) + 2(-3\hat{i} + 4\hat{j} - 4\hat{k}) = (6\hat{i} - 9\hat{j} + 12\hat{k}) + (-6\hat{i} + 4\hat{j} - 8\hat{k}) = \\ &= (6-6)\hat{i} + (-9+4)\hat{j} + (12-8)\hat{k} = 0\hat{i} - 5\hat{j} + 4\hat{k} = -5\hat{j} + 4\hat{k}. \end{aligned}$$

Ex.5: dados os vetores $\vec{a} = 6\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ e $\vec{b} = 3\hat{i} - 4\hat{j} + \hat{k}$, calcule $\vec{a} - \vec{b}$.

Solução:
$$\vec{a} - \vec{b} = (6\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) - (3\hat{i} - 4\hat{j} + \hat{k}) = (6-3)\hat{i} + (-1-4)\hat{j} + (2-1)\hat{k} = 3\hat{i} - 5\hat{j} + \hat{k}.$$

Com isto, terminamos este capítulo. No próximo capítulo, estudaremos os produtos entre vetores.