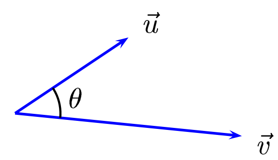
5 - Produtos entre vetores

Nos números reais, existe a operação de multiplicação de um número por outro. No caso dos vetores, o produto de um vetor por outro não é tão simples. Existem dois produtos entre vetores: um que resulta em um número (escalar) e outro que resulta em um outro vetor. Dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, chamamos ao primeiro produto entre eles de *produto escalar* (designado $\vec{u}\cdot\vec{v}$) e ao segundo, *produto vetorial* (designado $\vec{u}\times\vec{v}$). Esses dois produtos (e algumas composições deles) serão estudados neste capítulo.

5.1 - Produto escalar

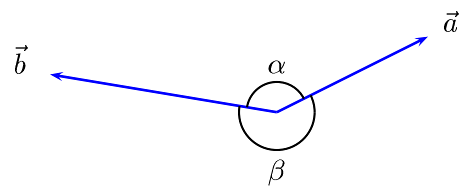
O *produto escalar* é uma operação $\vec{u}\cdot\vec{v}$ entre dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ que resulta em um número. Esta operação é definida pela seguinte fórmula:



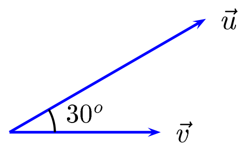
$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta,}$$

onde θ é o ângulo entre os dois vetores.

Obs.: por ângulo entre os vetores, entendemos o menor ângulo entre eles, como ilustrado na figura ao lado. O menor ângulo entre os dois vetores ao lado é o ângulo α.

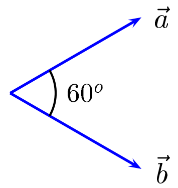


Ex.1: calcule o produto escalar $\vec{u}\cdot\vec{v}$ entre os vetores dados abaixo ($|\vec{u}| = 3$ e $|\vec{v}| = 2$).



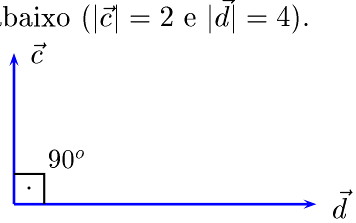
Solução: $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta = 3.2.\cos 30^o = 6.\frac{\sqrt{3}}{2} =$
$= 3\sqrt{3}$.

Ex.2: calcule o produto escalar $\vec{a}\cdot\vec{b}$ entre os vetores dados abaixo ($|\vec{a}| = 2$ e $|\vec{b}| = 2$).



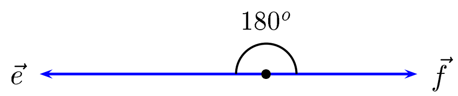
Solução: $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = 2.2.\cos 60^o = 4.\frac{1}{2} = 2$.

Ex.3: calcule o produto escalar $\vec{c}\cdot\vec{d}$ entre os vetores dados abaixo ($|\vec{c}| = 2$ e $|\vec{d}| = 4$).



Solução: $\vec{c}\cdot\vec{d} = |\vec{c}||\vec{d}|\cos\theta = 2.4.\cos 90^o = 8.0 = 0$.

Ex.4: calcule o produto escalar $\vec{e}\cdot\vec{f}$ entre os vetores dados abaixo ($|\vec{e}| = 3$ e $|\vec{f}| = 2$).



Solução: $\vec{e}\cdot\vec{f} = |\vec{e}||\vec{f}|\cos\theta = 3.2.\cos 180^o = 6.(-1) =$
$= -6$.

O produto escalar entre dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ tem as seguintes propriedades.

P1) $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$ (comutativa);

P2) $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ (distributiva com relação à adição);

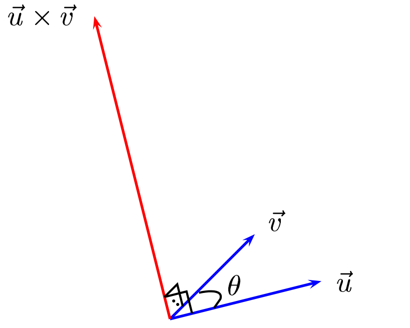
P3) $(a\vec{u})\cdot\vec{v}=c(\vec{u}\cdot\vec{v})$ (fatoração dos escalares).

5.2 - Produto vetorial

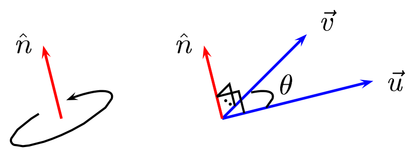
O *produto vetorial* é uma operação $\vec{u}\times\vec{v}$ entre dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ que resulta em um vetor. Esta operação é definida pela seguinte fórmula:

$$\boxed{\vec{u}\times\vec{v}=|\vec{u}||\vec{v}|\,\mathrm{sen}\,\theta\ \hat{n},}$$

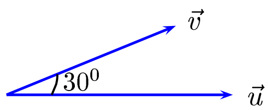
onde θ é o ângulo entre os dois vetores e $\hat{n}$ é um versor que é normal aos dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e cujo sentido é dado pela regra explicada a seguir.



Imaginemos um arco de circunferência orientado definido no plano formado pelos dois vetores, $\vec{u}$ e $\vec{v}$, sendo que o sentido desse arco vai de $\vec{u}$ até $\vec{v}$. Se o sentido for anti-horário, o versor $\hat{n}$ terá o sentido "para cima", indicado na figura a lado. Se o sentido for horário, o sentido de $\hat{n}$ será "para baixo". Esta regra também é chamada *regra da mão direita*, pois podemos imaginar uma mão direita posicionada de forma que os dedos se fechem de modo a ir da posição do vetor $\vec{u}$ à posição do vetor $\vec{v}$. O polegar indica, então, o sentido do vetor $\vec{u}\times\vec{v}$. Esta regra é ilustrada nos exemplos a seguir.

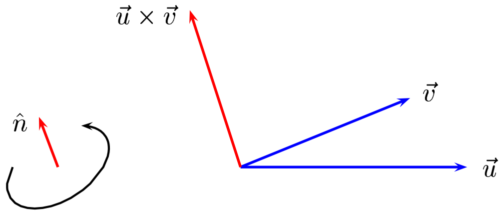


Ex.1: calcule o produto vetorial $\vec{u}\times\vec{v}$ entre os vetores dados abaixo ($|\vec{u}|=3$ e $|\vec{v}|=2$).

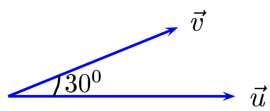


Solução: $\vec{u}\times\vec{v}=|\vec{u}||\vec{v}|\,\mathrm{sen}\,\theta\ \hat{n}=3.2.\,\mathrm{sen}\,30^o\hat{n}=$
$=6.\frac{1}{2}\hat{n}=2\hat{n}.$

O semi-arco que vai do vetor $\vec{u}$ para o vetor $\vec{v}$ tem o sentido anti-horário, o que indica que o versor normal tem o sentido para cima. O vetor $\vec{u}\times\vec{v}$ está representado na figura abaixo.

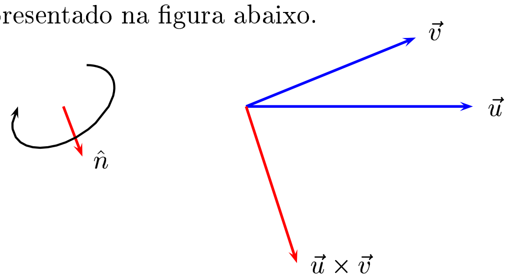


Ex.2: calcule o produto vetorial $\vec{v}\times\vec{u}$ entre os vetores dados abaixo ($|\vec{u}|=3$ e $|\vec{v}|=2$).



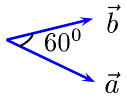
Solução: $\vec{v}\times\vec{u}=|\vec{v}||\vec{u}|\,\mathrm{sen}\,\theta\ \hat{n}=2.3.\,\mathrm{sen}\,30^o\hat{n}=$
$=6.\frac{1}{2}\hat{n}=2\hat{n}.$

O semi-arco que vai do vetor $\vec{v}$ para o vetor $\vec{u}$ tem o sentido horário, o que indica que o versor normal tem o sentido para baixo. O vetor $\vec{v}\times\vec{u}$ está representado na figura abaixo.

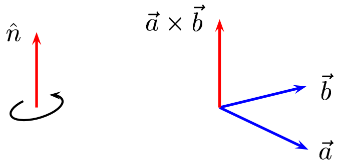


Observe que os dois produtos vetoriais calculados acima têm o mesmo módulo e direção, mas sentidos opostos. De um modo geral, temos $\vec{u}\times\vec{v}=-\vec{v}\times\vec{u}$ sempre.

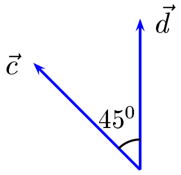
Ex.3: calcule o produto vetorial $\vec{a} \times \vec{b}$ entre os vetores dados abaixo ($|\vec{a}| = 2$ e $|\vec{b}| = 1$).



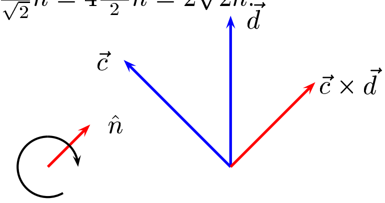
Solução: $\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \operatorname{sen}\theta \ \hat{n} = 2.1.\operatorname{sen} 60^o \hat{n} =$
$= 2.\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{n} = \sqrt{3}\hat{n}.$



Ex.4: calcule o produto vetorial $\vec{c} \times \vec{d}$ entre os vetores dados abaixo ($|\vec{c}| = 2$ e $|\vec{d}| = 2$).

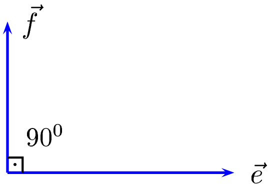


Solução: $\vec{c} \times \vec{d} = |\vec{c}||\vec{d}| \operatorname{sen}\theta \ \hat{n} = 2.2.\operatorname{sen} 45^o \hat{n} =$
$= 4.\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{n} = 4\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{n} = 2\sqrt{2}\hat{n}.$

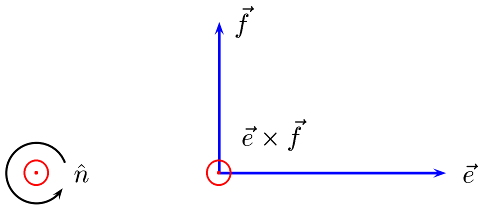


Nos exemplos acima, estamos trabalhando com projeções de figuras no espaço e os vetores resultantes dos produtos vetoriais devem ser vistos como perpendiculares aos pares de vetores que os formam. Algumas vezes, temos que representar vetores entrando ou saindo do plano. Para isto, podemos usar a seguinte notação: usamos o símbolo $\odot$ para representar um vetor saindo do plano e $\otimes$ para representar um vetor entrando no plano. A notação lembra a ponta de uma flecha saindo do plano ou a parte de trás de uma flecha entrando no plano. A seguir, mostramos exemplos utilizando esta notação.

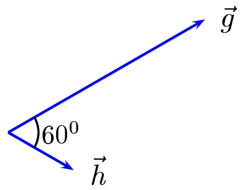
Ex.5: calcule o produto vetorial $\vec{e} \times \vec{f}$ entre os vetores dados abaixo ($|\vec{e}| = 3$ e $|\vec{f}| = 2$).



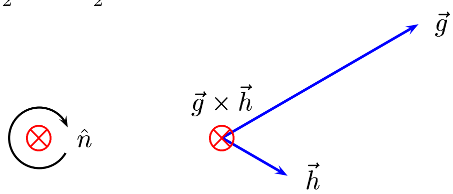
Solução: $\vec{e} \times \vec{f} = |\vec{e}||\vec{f}| \operatorname{sen}\theta \ \hat{n} = 3.2.\operatorname{sen} 90^o \hat{n} =$
$= 6.1\hat{n} = 6\hat{n}.$



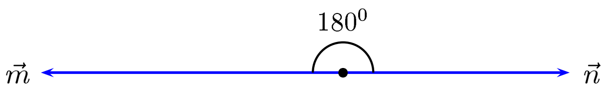
Ex.6: calcule o produto vetorial $\vec{g} \times \vec{h}$ entre os vetores dados abaixo ($|\vec{g}| = 3$ e $|\vec{h}| = 1$).



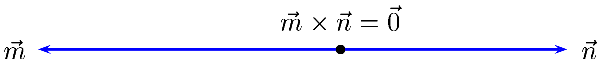
Solução: $\vec{g} \times \vec{h} = |\vec{g}||\vec{h}| \operatorname{sen}\theta \ \hat{n} = 3.1.\operatorname{sen} 60^o \hat{n} =$
$= 3.\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{n} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\hat{n}.$



Ex.7: calcule o produto vetorial $\vec{m} \times \vec{n}$ entre os vetores dados abaixo ($|\vec{m}| = 4$ e $|\vec{n}| = 3$).



Solução: $\vec{m} \times \vec{n} = |\vec{m}||\vec{n}| \operatorname{sen}\theta \ \hat{n} = 4.3.\operatorname{sen} 180^o \hat{n} = 12.0\hat{n} = \vec{0}.$



O fato do produto vetorial entre dois vetores que formam um ângulo de 90^o entre si ser o vetor nulo resolve o aparente paradoxo resultante do uso da regra aprendida para definir o sentido do vetor normal $\hat{n}$. Utilizando a regra aprendida, teríamos um vetor que poderia estar entrando no plano ou saindo dele. No entanto, como o vetor nulo não tem direção nem sentido, não há contradição no uso da regra.

O produto vetorial entre dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ tem as seguintes propriedades.

P1) $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$ (anticomutativa);

P2) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$ (distributiva com relação à adição);

P3) $(a\vec{u}) \times \vec{v} = c(\vec{u} \times \vec{v})$ (fatoração dos escalares).

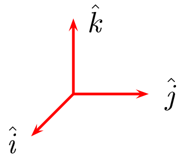
Obs.: o produto vetorial não tem a propriedade associativa, isto é, em geral, $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) \neq (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$.

A seguir, estudaremos os produtos escalar e vetorial utilizando a nota cão de vetroes em ters de suas componentes cartesianas, como aprendido no capítulo 5.

5.3 - Produto escalar em termos de componentes

Agora vamos estudar como podemos calcular o produto escalar entre dois vetores em termos de suas componentes cartesianas. Para isso, calcularemos os produtos escalares entre os versores $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ e $\hat{k}$:

$$\hat{\imath} \cdot \hat{\imath} = |\hat{\imath}||\hat{\imath}| \cos 0^o = 1.1.1 = 1, \quad \hat{\imath} \cdot \hat{\jmath} = |\hat{\imath}||\hat{\jmath}| \cos 90^o = 1.1.0 = 0,$$
$$\hat{\imath} \cdot \hat{k} = |\hat{\imath}||\hat{k}| \cos 90^o = 1.1.0 = 0, \quad \hat{\jmath} \cdot \hat{\jmath} = |\hat{\jmath}||\hat{\jmath}| \cos 0^o = 1.1.1 = 1,$$
$$\hat{\jmath} \cdot \hat{k} = |\hat{\jmath}||\hat{k}| \cos 90^o = 1.1.0 = 0, \quad \hat{k} \cdot \hat{k} = |\hat{k}||\hat{k}| \cos 0^o = 1.1.1 = 1.$$



Devido à propriedade comutativa do produto escalar, temos que $\hat{\jmath} \cdot \hat{\imath} = 0$, $\hat{k} \cdot \hat{\imath} = 0$ e $\hat{k} \cdot \hat{\jmath} = 0$. Com isto, podemos montar a seguinte tabela:

$\cdot$	$\hat{\imath}$	$\hat{\jmath}$	$\hat{k}$
$\hat{\imath}$	1	0	0
$\hat{\jmath}$	0	1	0
$\hat{k}$	0	0	1

.

Vamos, agora, calcular o produto escalar entre dois vetores, $\vec{u} = u_x\hat{\imath} + u_y\hat{\jmath} + u_z\hat{k}$ e $\vec{v} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} + v_z\hat{k}$.

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= (u_x\hat{\imath} + u_y\hat{\jmath} + u_z\hat{k}) \cdot (v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} + v_z\hat{k}) = u_x\hat{\imath} \cdot v_x\hat{\imath} + u_x\hat{\imath} \cdot v_y\hat{\jmath} + u_x\hat{\imath} \cdot v_z\hat{k} + \\ & \quad + u_y\hat{\jmath} \cdot v_x\hat{\imath} + u_y\hat{\jmath} \cdot v_y\hat{\jmath} + u_y\hat{\jmath} \cdot v_z\hat{k} + u_z\hat{k} \cdot v_x\hat{\imath} + u_z\hat{k} \cdot v_y\hat{\jmath} + u_z\hat{k} \cdot v_z\hat{k} = \\ &= u_xv_x\hat{\imath} \cdot \hat{\imath} + u_xv_y\hat{\imath} \cdot \hat{\jmath} + u_xv_z\hat{\imath} \cdot \hat{k} + u_yv_x\hat{\jmath} \cdot \hat{\imath} + u_yv_y\hat{\jmath} \cdot \hat{\jmath} + u_yv_z\hat{\jmath} \cdot \hat{k} + u_zv_x\hat{k} \cdot \hat{\imath} + u_zu_y\hat{k} \cdot \hat{\jmath} + u_zv_z\hat{k} \cdot \hat{k}. \end{aligned}$$

Usando a tabela acima, temos

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_xv_x.1 + u_xv_y.0 + u_xv_z.0 + u_yv_x.0 + u_yv_y.1 + u_yv_z.0 + u_zv_x.0 + u_zu_y.0 + u_zv_z.1 = u_xv_x + u_yv_y + u_zv_z.$$

Temos, então, que

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = u_xv_x + u_yv_y + u_zv_z.}$$

A seguir, mostramos alguns exemplos da aplicação desta fórmula.

Ex.1: dados os vetores $\vec{u} = 3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 4\hat{k}$ e $\vec{v} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 2\hat{k}$, calcule $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Solução: $\vec{u} \cdot \vec{v} = (3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 4\hat{k}) \cdot (\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 2\hat{k}) = 3.1 + 2.2 + 4.2 = 3 + 4 + 8 = 15.$

Ex.2: dados os vetores $\vec{a} = 2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + \hat{k}$ e $\vec{b} = 3\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 2\hat{k}$, calcule $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Solução: $\vec{a} \cdot \vec{b} = (2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + \hat{k}) \cdot (3\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 2\hat{k}) = 2.3 + (-3).1 + 1.(-2) = 6 - 3 - 2 = 1$.

Ex.3: dados os vetores $\vec{c} = \hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 6\hat{k}$ e $\vec{d} = 3\hat{\imath} - 3\hat{k}$, calcule $\vec{c} \cdot \vec{d}$.

Solução: $\vec{c} \cdot \vec{d} = (\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 6\hat{k}) \cdot (3\hat{\imath} - 3\hat{k}) = 1.3 + 3.0 + 6.(-3) = 3 + 0 - 18 = -15$.

Vale lembrar que o resultado do produto escalar é um número (escalar).

5.4 - Produto vetorial em termos de componentes

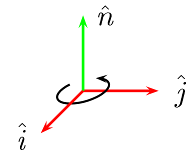
Para definir um produto vetorial de vetores em termos de suas componentes, calcularemos os produtos vetoriais entre os versores $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ e $\hat{k}$.

- $\hat{\imath} \times \hat{\imath} = |\hat{\imath}||\hat{\imath}| \operatorname{sen} 0^o \; \hat{n} = 1.1.0 \; \hat{n} = 0 \; \hat{n} = \vec{0}$.

Como o resultado é o vetor nulo, não é necessário estudarmos a direção ou o sentido da normal $\hat{n}$.

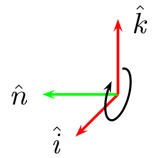
- $\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = |\hat{\imath}||\hat{\jmath}| \operatorname{sen} 90^o \; \hat{n} = 1.1.1 \; \hat{n} = \hat{n}$.

O sentido do versor $\hat{n}$ é dado pela regra que aprendemos antes. Aplicando-a ao produto vetorial $\hat{\imath} \times \hat{\jmath}$, verificamos que o versor $\hat{n}$ tem a direção e o sentido do versor $\hat{k}$. Como só pode haver um versor (vetor de módulo igual a 1) na direção e sentido do versor $\hat{k}$, concluímos que $\hat{n} = \hat{k}$. Portanto, $\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \hat{k}$.



- $\hat{\imath} \times \hat{k} = |\hat{\imath}||\hat{k}| \cos 90^o \; \hat{n} = 1.1.1 \; \hat{n} = \hat{n}$.

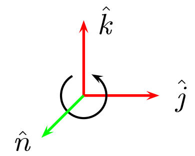
A regra indica a direção do versor $\hat{\jmath}$, no sentido contrário a este, de modo que temos $\hat{\imath} \times \hat{k} = -\hat{\jmath}$.



- $\hat{\jmath} \times \hat{\jmath} = |\hat{\jmath}||\hat{\jmath}| \cos 0^o \; \hat{n} = 1.1.0 \; \hat{n} = 0 \; \hat{n} = \vec{0}$.

- $\hat{\jmath} \times \hat{k} = |\hat{\jmath}||\hat{k}| \cos 90^o \; \hat{n} = 1.1.1 \; \hat{n} = \hat{n}$.

A regra indica que $\hat{\jmath} \times \hat{k} = \hat{\imath}$.



- $\hat{k} \times \hat{k} = |\hat{k}||\hat{k}| \cos 0^o \; \hat{n} = 1.1.0 \; \hat{n} = 0 \; \hat{n} = \vec{0}$.

Devido à propriedade anticomutativa do produto vetorial, temos que $\hat{\jmath} \times \hat{\imath} = -\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = -\hat{k}$, $\hat{k} \times \hat{\imath} = -\hat{\imath} \times \hat{k} = \hat{\jmath}$ e $\hat{k} \times \hat{\jmath} = -\hat{\jmath} \times \hat{k} = -\hat{\imath}$. Com isto, podemos montar a seguinte tabela:

$\times$	$\hat{\imath}$	$\hat{\jmath}$	$\hat{k}$
$\hat{\imath}$	$\vec{0}$	$\hat{k}$	$-\hat{\jmath}$
$\hat{\jmath}$	$-\hat{k}$	$\vec{0}$	$\hat{\imath}$
$\hat{k}$	$\hat{\jmath}$	$-\hat{\imath}$	$\vec{0}$

Vamos, agora, calcular o produto vetorial entre dois vetores, $\vec{u} = u_x\hat{\imath} + u_y\hat{\jmath} + u_z\hat{k}$ e $\vec{v} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} + v_z\hat{k}$.

$$
\begin{aligned}
\vec{u} \times \vec{v} \;\; &= \;\; (u_x\hat{\imath} + u_y\hat{\jmath} + u_z\hat{k}) \times (v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} + v_z\hat{k}) = u_x\hat{\imath} \times v_x\hat{\imath} + u_x\hat{\imath} \times v_y\hat{\jmath} + u_x\hat{\imath} \times v_z\hat{k} + \\
&\quad + u_y\hat{\jmath} \times v_x\hat{\imath} + u_y\hat{\jmath} \times v_y\hat{\jmath} + u_y\hat{\jmath} \times v_z\hat{k} + u_z\hat{k} \times v_x\hat{\imath} + u_z\hat{k} \times v_y\hat{\jmath} + u_z\hat{k} \times v_z\hat{k} =
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} = \; & u_x v_x \hat{i} \times \hat{i} + u_x v_y \hat{i} \times \hat{j} + u_x v_z \hat{i} \times \hat{k} + u_y v_x \hat{j} \times \hat{i} + u_y v_y \hat{j} \times \hat{j} + u_y v_z \hat{j} \times \hat{k} + \\ & + u_z v_x \hat{k} \times \hat{i} + u_z u_y \hat{k} \times \hat{j} + u_z v_z \hat{k} \times \hat{k}. \end{aligned}$$

Usando a tabela acima, temos

$$\vec{u} \times \vec{v} = u_x v_y \hat{k} - u_x v_z \hat{j} - u_y v_x \hat{k} + u_y v_z \hat{i} + u_z v_x \hat{j} - u_z u_y \hat{i} = (u_y v_z - u_z v_y)\hat{i} + (u_z v_x - u_x v_z)\hat{j} + (u_x v_y - u_y v_x)\hat{k}.$$

Consideremos, agora, o seguinte determinante:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} &= (u_y v_z \hat{i} + u_z v_x \hat{j} + u_x v_y \hat{k}) - (u_z v_y \hat{i} + u_x v_z \hat{j} + u_y v_x \hat{k}) = \\ &= (u_y v_z - u_z v_y)\hat{i} + (u_z v_x - u_x v_z)\hat{j} + (u_x v_y - u_y v_x)\hat{k}. \end{aligned}$$

Comparando este resultado com o resultado obtido acima para $\vec{u} \times \vec{v}$, podemos concluir que é possível escrever o produto vetorial como

$$\boxed{\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}.}$$

Ex.1: dados os vetores $\vec{u} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k}$ e $\vec{v} = \hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$, calcule $\vec{u} \times \vec{v}$.

Solução:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (4\hat{i} + 4\hat{j} + 9\hat{k}) - (12\hat{i} + 6\hat{j} + 2\hat{k}) = (4-12)\hat{i} + (4-6)\hat{j} + (9-2)\hat{k} = -8\hat{i} - 2\hat{j} + 7\hat{k}.$$

Ex.2: dados os vetores $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ e $\vec{b} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$, calcule $\vec{a} \times \vec{b}$.

Solução:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (2\hat{i} + 9\hat{j} + 2\hat{k}) - (3\hat{i} - 4\hat{j} - 3\hat{k}) = (2-3)\hat{i} + (9+4)\hat{j} + (2+3)\hat{k} = -\hat{i} + 13\hat{j} + 5\hat{k}.$$

Ex.3: dados os vetores $\vec{c} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ e $\vec{d} = 3\hat{i} + \hat{k}$, calcule $\vec{c} \times \vec{d}$.

Solução:

$$\vec{c} \times \vec{d} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (3\hat{i} - 3\hat{j} + 0\hat{k}) - (0\hat{i} + 2\hat{j} + 9\hat{k}) = (3-0)\hat{i} + (-3-2)\hat{j} + (0-9)\hat{k} = 3\hat{i} - 5\hat{j} - 9\hat{k}.$$

5.5 - Produto misto

Existe uma operação entre vetores que, apesar de não ser fundamental (ela é uma composição do produto escalar com o vetorial), é utilizada em algumas aplicações. É o *produto misto*, definido como

$$\boxed{(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}).}$$

O resultado desta operação é um número, calculado a seguir.

$$\begin{aligned}
(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) &= \vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = (u_x\hat{i}+u_y\hat{j}+u_z\hat{k})\cdot\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ v_x & v_y & v_z\\ w_x & w_y & w_z\end{vmatrix} = \\
&= (u_x\hat{i}+u_y\hat{j}+u_z\hat{k})\cdot\left[(v_yw_z\hat{i}+v_zw_x\hat{j}+v_xw_y\hat{k})-(v_zw_y\hat{i}+v_xw_z\hat{j}+v_yw_x\hat{k})\right] = \\
&= (u_x\hat{i}+u_y\hat{j}+u_z\hat{k})\cdot\left[(v_yw_z-v_zw_y)\hat{i}+(v_zw_x-v_xw_z)\hat{j}+(v_xw_y-v_yw_x)\hat{k}\right] = \\
&= u_x(v_yw_z-v_zw_y)+u_y(v_zw_x-v_xw_z)+u_z(v_xw_y-v_yw_x).
\end{aligned}$$

Consideremos, agora, o seguinte determinante:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z\\ v_x & v_y & v_z\\ w_x & w_y & w_z\end{vmatrix} &= (u_xv_yw_z+u_yv_zw_x+u_zv_xw_y)-(u_xv_zw_y+u_yv_xw_z+u_zv_yw_x) = \\
&= u_x(v_yw_z-v_zw_y)+u_y(v_zw_x-v_xw_z)+u_z(v_xw_y-v_yw_x)\ .
\end{aligned}$$

Comparando com o resultado do produto misto, chegamos à seguinte fórmula:

$$\boxed{(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z\\ v_x & v_y & v_z\\ w_x & w_y & w_z\end{vmatrix}\ .}$$

Ex.1: dados os vetores $\vec{u}=3\hat{i}+2\hat{j}+4\hat{k}$, $\vec{v}=\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}$ e $\vec{w}=\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}$, calcule $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$.

Solução:

$$(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4\\ 1 & 3 & 2\\ 1 & -2 & 3\end{vmatrix} = (27+4-8)-(-12+6+12) = 23-6 = 17.$$

Ex.2: dados os vetores $\vec{a}=2\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}$, $\vec{b}=3\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ e $\vec{c}=2\hat{i}-\hat{k}$, calcule $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$.

Solução:

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3\\ 3 & -1 & 1\\ 2 & 0 & -1\end{vmatrix} = (2-2+0)-(0+3-6) = 0-(-3) = 3.$$

Com isto, encerramos os estudos sobre produtos entre vetores. No próximo capítulo, veremos uma nova notação para vetores e algumas aplicações destes.