6 - Aplicações algébricas e geométricas de vetores

Neste capítulo, estudaremos algumas das aplicações de vetores na geometria algébrica. Antes disto, porém, veremos uma notação que simplifica os cálculos e é bastante utilizada.

6.1 - Vetores como pares ou ternas ordenadas

Existe uma outra representação de vetores que é bastante conveniente: a representação em ternos de pares ou ternas ordenadas. *Pares ordenados* são conjuntos de dois elementos, (a, b), em que a ordem em que estes aparecem é importante. De maneira semelhante, *ternas ordenadas* são conjuntos de três elementos, (a, b, c), onde a ordem é importante.

Um vetor no plano dado por $\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j}$ pode ser representado em termos de um par ordenado da seguinte forma:

$$\boxed{\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} = (v_x, v_y).}$$

De forma semelhante, um vetor no espaço dado por $\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}$ pode ser representado em termos de uma terna ordenada da seguinte forma:

$$\boxed{\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k} = (v_x, v_y, v_k).}$$

Ex.1: escreva o vetor $\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j}$ em termos de um par ordenado.

Solução: $\vec{a} = (3, 2)$.

Ex.2: escreva o vetor $\vec{b} = \hat{i} - 3\hat{j}$ em termos de um par ordenado.

Solução: $\vec{b} = (1, -3)$.

Ex.3: escreva o vetor $\vec{c} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k}$ em termos de uma terna ordenada.

Solução: $\vec{c} = (2, -2, 6)$.

Ex.4: escreva o vetor $\vec{d} = -3\hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k}$ em termos de uma terna ordenada.

Solução: $\vec{d} = (-3, 2, -8)$.

Ex.5: escreva o vetor $\vec{e} = (2, -1)$ usando versores.

Solução: $\vec{e} = 2\hat{i} - \hat{j}$.

Ex.6: escreva o vetor $\vec{f} = (3, 0, 2)$ usando versores.

Solução: $\vec{f} = 3\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} + 2\hat{k} = 3\hat{\imath} + 2\hat{k}$.

Considerando pares ordenados, dados dois vetores, $\vec{u} = (u_x, u_y)$ e $\vec{v} = (v_x, v_y)$, as operações vetoriais básicas ficam

$$\boxed{\vec{u} + \vec{v} = (u_x + v_x, u_y + v_y)} \quad \text{(soma de vetores)},$$

$$\boxed{k\vec{v} = (kv_x, kv_y),\ \ k \in I\!R} \quad \text{(produto de um vetor por um escalar)},$$

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y} \quad \text{(produto escalar)}.$$

Note a ausência do produto vetorial, que é uma operação intrinsicamente tridimensional (também possível em dimensões maiores).

Se considerarmos ternas ordenadas, dados dois vetores, $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ e $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$, as operações vetoriais básicas ficam

$$\boxed{\vec{u} + \vec{v} = (u_x + v_x, u_y + v_y, u_z + v_z)} \quad \text{(soma de vetores)},$$

$$\boxed{k\vec{v} = (kv_x, kv_y, kv_z),\ \ k \in I\!R} \quad \text{(produto de um vetor por um escalar)},$$

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z} \quad \text{(produto escalar)},$$

$$\boxed{\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}} \quad \text{(produto vetorial)}.$$

Para que voltemos à notação de ternas ordenadas, o produto vetorial tem que ser mudado de volta para a notaçã de ternas após o cálculo do determinante (que envolve os versores).

Além destas, dados os vetores $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$, $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ e $\vec{w} = (w_x, w_y, w_z)$, podemos escrever também o produto misto:

$$\boxed{(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}} \quad \text{(produto misto)}.$$

A seguir, veremos alguns exemplos das operações acima usando a notação nova.

Ex.1: dados os vetores $\vec{u} = (3, -1, 1)$ e $\vec{v} = (2, 4, -6)$, calcule $\vec{u} + \vec{v}$.

Solução: $\vec{u} + \vec{v} = (3 + 2, -1 + 4, 1 - 6) = (5, 3, -5)$.

Ex.2: dados os vetores $\vec{a} = (2, 0, -2)$ e $\vec{b} = (3, -1, 2)$, calcule $\vec{a} + \vec{b}$.

Solução: $\vec{a} + \vec{b} = (2 + 3, 0 - 1, -2 + 2) = (5, -1, 0)$.

Ex.3: dados os vetores $\vec{u} = (3, -1, 1)$ e $\vec{v} = (2, 4, -6)$, calcule $3\vec{u} - \vec{v}$.

Solução: $\vec{u} + \vec{v} = 3(3, -1, 1) - (2, 4, -6) = (9, -3, 3) - (2, 4, -6) = (9 - 2, -3 - 4, 3 + 6) = (7, -7, 9)$.

Ex.4: dados os vetores $\vec{a} = (2, 0, -2)$ e $\vec{b} = (3, -1, 2)$, calcule $-2\vec{a} + 4\vec{b}$.

Solução: $-2\vec{a} + 4\vec{b} = -2(2, 0, -2) + 4(3, -1, 2) = (-4, 0, 4) + (12, -4, 8) = (-4 + 12, 0 - 4, 4 + 8) = (8, -4, 12)$.

Ex.5: dados os vetores $\vec{u} = (3, -1, 1)$ e $\vec{v} = (2, 4, -6)$, calcule $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Solução: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3.2 + (-1).4 + 1.(-6) = 6 - 4 - 6 = -4$.

Ex.6: dados os vetores $\vec{a} = (2, 0, -2)$ e $\vec{b} = (3, -1, 2)$, calcule $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Solução: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2.3 + 0.(-1) + (-2).2 = 6 + 0 - 4 = 2.$

Ex.7: dados os vetores $\vec{u} = (3, -1, 1)$ e $\vec{v} = (2, 4, -6)$, calcule $\vec{u} \times \vec{v}$.

Solução:

$$\begin{aligned} \vec{u} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -6 \end{vmatrix} = (6\hat{i} + 2\hat{j} + 12\hat{k}) - (4\hat{i} - 18\hat{j} - 2\hat{k}) = \\ &= (6-4)\hat{i} + (2+18)\hat{j} + (12+2)\hat{k} = 2\hat{i} + 20\hat{j} + 14\hat{k} = (2, 20, 14). \end{aligned}$$

Ex.8: dados os vetores $\vec{a} = (2, 0, -2)$ e $\vec{b} = (3, -1, 2)$, calcule $\vec{a} \times \vec{b}$.

Solução:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (0\hat{i} - 6\hat{j} - 2\hat{k}) - (-2\hat{i} + 4\hat{j} + 0\hat{k}) = \\ &= (0-2)\hat{i} + (-6-4)\hat{j} + (-2+0)\hat{k} = -2\hat{i} - 8\hat{j} - 2\hat{k} = (-2, -8, -2). \end{aligned}$$

Ex.9: dados os vetores $\vec{u} = (3, -1, 1)$, $\vec{v} = (2, 4, -6)$ e $\vec{w} = (2, 1, -3)$, calcule $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Solução:

$$\begin{aligned} (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) &= \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -6 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (-36 + 12 + 2) - (-18 + 6 + 8) = \\ &= -22 - (-4) = -22 + 4 = -18. \end{aligned}$$

Ex.10: dados os vetores $\vec{a} = (2, 0, -2)$, $\vec{b} = (3, -1, 2)$ e $\vec{c} = (2, -1, 2)$, calcule $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

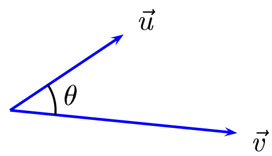
Solução:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (-4 + 0 + 6) - (-2 + 0 + 4) = 2 - 2 = 0.$$

6.2 - Cálculo de ângulos entre vetores

Existe um grande número de aplicações de vetores, em diversas áreas do conhecimento. Veremos aqui algumas dessas aplicações, começando pelo cálculo do ângulo entre dois vetores.

Dados dois vetores, podemos calcular o ângulo entre eles. Isto se faz usando a definição do produto escalar. Dados dois vetores, $\vec{u}$ e $\vec{v}$, o produto escalar entre eles é dado por



$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos\theta \Rightarrow \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \cos\theta.$$

Temos, então, a seguinte fórmula:

$$\boxed{\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}.}$$

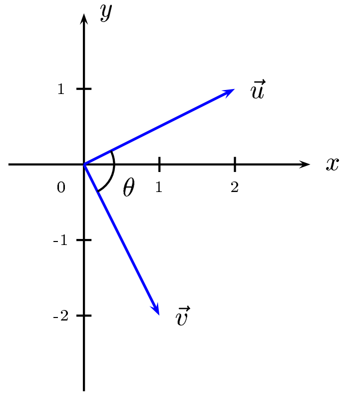
A partir do cosseno de um ângulo, podemos calcular o próprio ângulo:

$$\theta = \arccos \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|},$$

isto é, θ é o arco (ângulo) cujo cosseno é dado pela expressão acima.

Ex.1: esboce os vetores $\vec{u}=(2,1)$ e $\vec{v}=(1,-2)$ e calcule o ângulo entre eles.

Solução: temos que
$$\cos\theta=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}.$$



O produto escalar fica
$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(2,1)\cdot(1,-2)=2.1+1.(-2)=2-2=0.$$

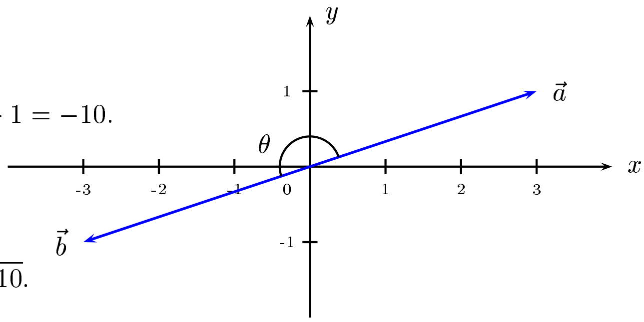
Os módulos dois dois vetores são dados por
$$|\vec{u}|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5},\quad |\vec{v}|=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}\ .$$

Substituindo esses valores na fórmula para o cosseno do ângulo, temos
$$\cos\theta=\frac{0}{\sqrt{5}\sqrt{5}}=\frac{0}{5}=0.$$

Portanto,
$$\theta=\text{arccos }0\Rightarrow\theta=90^o.$$

Ex.2: esboce os vetores $\vec{a}=(3,1)$ e $\vec{b}=(-3,-1)$ e calcule o ângulo entre eles.

Solução: temos que
$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}.$$



O produto escalar fica
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(3,1)\cdot(-3,-1)=(-3).3+1.(-1)=-9-1=-10.$$

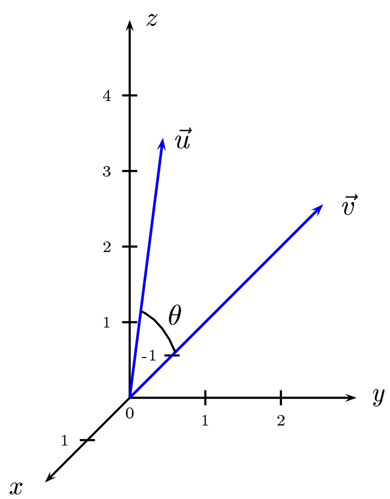
Os módulos dois dois vetores são dados por
$$|\vec{a}|=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10},$$
$$|\vec{b}|=\sqrt{(-3)^2+(-1)^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}.$$

Substituindo esses valores na fórmula para o cosseno do ângulo, temos
$$\cos\theta=\frac{-10}{\sqrt{10}\sqrt{10}}=\frac{-10}{10}=-1.$$

Portanto,
$$\theta=\text{arccos }(-1)\Rightarrow\theta=180^o.$$

Ex.3: esboce os vetores $\vec{u}=(1,1,4)$ e $\vec{v}=(-1,2,2)$ e calcule o ângulo entre eles.

Solução: temos que
$$\cos\theta=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}.$$



O produto escalar fica
$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(1,1,4)\cdot(-1,2,2)=1.(-1)+1.2+4.2=-1+2+8=9.$$

Os módulos dos dois vetores são dados por
$$|\vec{u}|=\sqrt{(-1)^2+2^2+2^2}=\sqrt{1+4+4}=\sqrt{9}=3,$$
$$|\vec{v}|=\sqrt{1^2+1^2+4^2}=\sqrt{1+1+16}=\sqrt{18}=\sqrt{2.3^2}=3\sqrt{2}.$$

Substituindo esses valores na fórmula para o cosseno do ângulo, temos
$$\cos\theta=\frac{9}{3.3\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Portanto,
$$\theta=\text{arccos }\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\theta=45^o.$$

Ex.4: esboce os vetores $\vec{a} = (2, 1, -1)$ e $\vec{b} = (1, -1, -2)$ e calcule o ângulo entre eles.

Solução: temos que

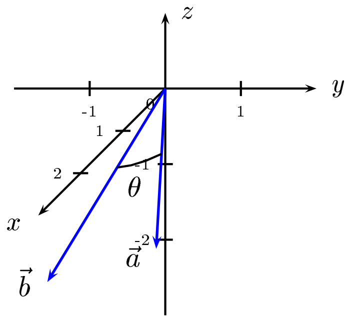
$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}.$$

O produto escalar fica

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (2, 1, -1)\cdot(1, -1, -2) = 2.1 + 1.(-1) + (-1).(-2) = 2 - 1 + 2 = 3.$$

Os módulos dois dois vetores são dados por

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6},$$
$$|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{1 + 1 + 4} = \sqrt{6}.$$



Substituindo esses valores na fórmula para o cosseno do ângulo, temos

$$\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Portanto,

$$\theta = \arccos\frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60^o.$$

Não é necessário esboçar os vetores para calcular o ângulo entre eles, e o resultado nem sempre é um ângulo notável, como mostra o exemplo a seguir.

Ex.5: calcule o ângulo entre os vetores $\vec{c} = (3, 2, -4)$ e $\vec{d} = (3, -2, 1)$.

Solução: temos que

$$\cos\theta = \frac{\vec{c}\cdot\vec{d}}{|\vec{c}||\vec{d}|}.$$

O produto escalar fica

$$\vec{c}\cdot\vec{d} = (3, 2, -4)\cdot(3, -2, 1) = 3.3 + 2.(-2) + (-4).1 = 9 - 4 - 4 = 1.$$

Os módulos dois dois vetores são dados por

$$|\vec{c}| = \sqrt{3^2 + 2^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 4 + 16} = \sqrt{29},$$
$$|\vec{d}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{9 + 4 + 1} = \sqrt{14}.$$

Substituindo esses valores na fórmula para o cosseno do ângulo, temos

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{29}\sqrt{14}} = \frac{1}{\sqrt{406}}.$$

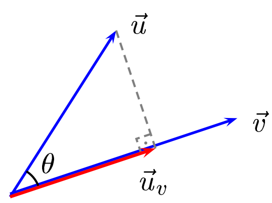
Portanto,

$$\theta = \arccos\frac{1}{\sqrt{406}} \Rightarrow \theta \approx 87^o.$$

A resposta em termos do arco cosseno é a exata, sendo que em seguida conseguimos um ângulo aproximado.

6.3 - Projeção de um vetor sobre outro vetor

Outra aplicação envolvendo o produto escalar é o cálculo da projeção de um vetor sobre outro. Dados dois vetores, $\vec{u}$ e $\vec{v}$, entendemos por projeção do vetor $\vec{u}$ sobre o vetor $\vec{v}$ o vetor $\vec{u}_v$ que tem a mesma direção de $\vec{v}$ e cujo módulo é o cateto adjacente ao ângulo θ (ou seu complemento, conforme o caso) no triângulo retângulo cuja hipotenusa é dada pelo $|\vec{u}|$.



O vetor projeção $\vec{u}_v$ de um vetor $\vec{u}$ sobre um vetor $\vec{v}$ é dado pela seguinte fórmula:

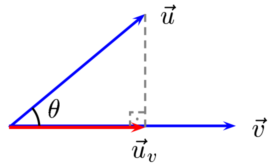
$$\boxed{\vec{u}_v = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\,\vec{v},}$$

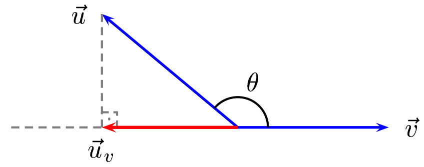
que é demonstrada a seguir.

Demonstração: a seguir, temos duas figuras que representam dois casos possíveis de projeção, dependendo do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$. A projeção $\vec{u}_v$ tem a mesma direção que o vetor $\vec{v}$, de modo que

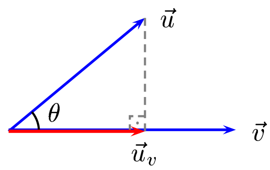
$$\vec{u}_v = \pm|\vec{u}_v|\hat{v},$$

onde $\hat{v}$ é o versor de $\vec{v}$ e o sinal depende do ângulo entre os vetores. Vamos, agora, considerar os dois casos.



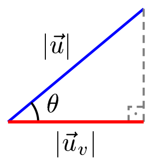


No primeiro caso, temos um triângulo cujo ângulo é θ, a hipotenusa é $|\vec{u}|$ e o cateto adjacente é $|\vec{u}_v|$. Temos, então, que



$$\cos\theta = \frac{|\vec{u}_v|}{|\vec{u}|} \Rightarrow |\vec{u}|\cos\theta = |\vec{u}_v| \Rightarrow |\vec{u}_v| = |\vec{u}|\cos\theta.$$

Substituindo $\cos\theta$ de acordo com a fórmula obtida para o ângulo entre vetores, obtemos



$$|\vec{u}_v| = |\vec{u}|\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} \Rightarrow |\vec{u}_v| = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}.$$

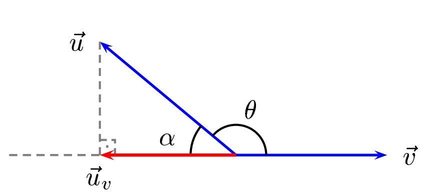
Conseguimos, então, o módulo do vetor projeção. Considerando que, neste caso, $\vec{u}_v$ tem a mesma direção e sentido que o versor $\hat{v}$, temos

$$\vec{u}_v = |\vec{u}_v|\hat{v} \Rightarrow \vec{u}_v = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}\,\hat{v}.$$

Como $\hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$, temos que

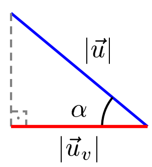
$$\vec{u}_v = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \Rightarrow \vec{u}_v = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}||\vec{v}|}\,\vec{v}.$$

No segundo caso, temos um triângulo cujo ângulo é o complementar do ângulo θ, dado por $\alpha = 180^o - \theta$, a hipotenusa é $|\vec{u}|$ e o cateto adjacente é $|\vec{u}_v|$. Temos, então, que



$$\cos\alpha = \frac{|\vec{u}_v|}{|\vec{u}|} \Rightarrow |\vec{u}|\cos\alpha = |\vec{u}_v| \Rightarrow |\vec{u}_v| = |\vec{u}|\cos\alpha.$$

Vamos, agora, calcular o cosseno em termos do ângulo θ. Isto se faz usando a fórmula para a soma do cosseno da soma de dois ângulos, $\cos(a+b) = \cos a.\cos b - \operatorname{sen} a.\operatorname{sen} b$:



$$\cos\alpha = \cos(180^o - \theta) = \cos 180^o.\cos(-\theta) - \operatorname{sen} 180^o.\operatorname{sen}(-\theta).$$

Como $\cos 180^o = -1$ e $\operatorname{sen} 180^o = 0$, temos

$$\cos\alpha = -1.\cos(-\theta) - 0.\operatorname{sen}(-\theta) = -\cos(-\theta).$$

Como $\cos(-\theta) = \cos\theta$ para qualquer ângulo θ, temos, então, que

$$\cos\alpha = -\cos\theta.$$

Voltando à fórmula obtida do produto escalar e substituindo o cosseno de α, temos

$$|\vec{u}_v| = -|\vec{u}|\cos\theta.$$

Substituindo $\cos\theta$ de acordo com a fórmula obtida para o ângulo entre vetores, obtemos

$$|\vec{u}_v| = -|\vec{u}|\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} \Rightarrow |\vec{u}_v| = -\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}.$$

Conseguimos, então, o módulo do vetor projeção. Considerando que, neste caso, $\vec{u}_v$ tem a mesma direção, mas sentido oposto ao versor $\hat{v}$, temos

$$\vec{u}_v = -|\vec{u}_v|\hat{v} \Rightarrow \vec{u}_v = -\left(-\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}\right)\hat{v} \Rightarrow \vec{u}_v = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}\,\hat{v}.$$

Como $\hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$, temos que

$$\vec{u}_v = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \Rightarrow \vec{u}_v = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}||\vec{v}|}\,\vec{v}.$$

Podemos ver que, nos dois casos descritos acima, obtemos a mesma fórmula:

$$\vec{u}_v = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}||\vec{v}|}\,\vec{v}.$$

Se considerarmos, agora que

$$\vec{v}\cdot\vec{v} = (v_x,v_y,v_z)\cdot(v_x,v_y,v_z) = v_x^2+v_y^2+v_z^2$$

e

$$|\vec{v}||\vec{v}| = \sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2} = v_x^2+v_y^2+v_z^2,$$

de modo que $\vec{v}\cdot\vec{v} = |\vec{v}||\vec{v}|$, podemos escrever a expressão para a projeção do vetor $\vec{u}$ sobre o vetor $\vec{v}$ da seguinte forma:

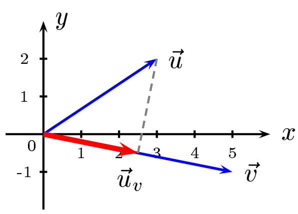
$$\vec{u}_v = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\,\vec{v}.$$

A seguir, veremos alguns exemplos utilizando essa fórmula.

Ex.1: calcule a projeção $\vec{u}_v$ do vetor $\vec{u}=(3,2)$ sobre o vetor $\vec{v}=(5,-1)$ e faça uma representação gráfica de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{u}_v$.

Solução:

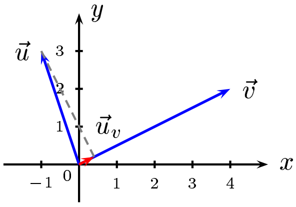
$$\begin{aligned}\vec{u}_v &= \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\,\vec{v} = \frac{(3,2)\cdot(5,-1)}{(5,-1)\cdot(5,-1)}\,(5,-1) = \frac{3.5+2.(-1)}{5.5+(-1)(-1)}\,(5,-1) = \\ &= \frac{15-2}{25+1}\,(5,-1) = \frac{13}{26}\,(5,-1) = \frac{1}{2}\,(5,-1) = \left(\frac{5}{2.2},-\frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$



Ex.2: calcule a projeção do vetor $\vec{a}=(-1,3)$ sobre o vetor $\vec{b}=(4,2)$ e faça uma representação gráfica de $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{a}_b$..

Solução:

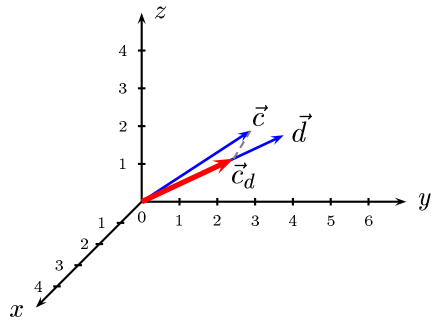
$$\begin{aligned}\vec{a}_b &= \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{b}\cdot\vec{b}}\,\vec{b} = \frac{(-1,3)\cdot(4,2)}{(4,2)\cdot(4,2)}\,(4,2) = \frac{(-1).4+3.2}{4.4+2.2}\,(4,2) = \frac{-4+6}{16+4}\,(4,2) = \\ &= \frac{2}{20}\,(4,2) = \frac{1}{10}\,(4,2) = \left(\frac{4}{10},\frac{2}{10}\right) = \left(\frac{2}{5},\frac{1}{5}\right).\end{aligned}$$



Ex.3: calcule a projeção $\vec{c}_d$ do vetor $\vec{c} = (2,4,3)$ sobre o vetor $\vec{d} = (4,6,4)$ e faça uma representação gráfica de $\vec{c}$, $\vec{d}$ e $\vec{c}_d$.

Solução:

$$\begin{aligned}\vec{c}_d &= \frac{\vec{c}\cdot\vec{d}}{\vec{d}\cdot\vec{d}}\,\vec{d} = \frac{(2,4,3)\cdot(4,6,4)}{(4,6,4)\cdot(4,6,4)}\,(4,6,4) = \frac{2.4+4.6+4.3}{4.4+6.6+4.4}\,(4,6,4) = \\ &= \frac{8+24+12}{16+36+16}\,(4,6,4) = \frac{44}{68}\,(4,6,4) = \frac{11}{17}\,(4,6,4) = \left(\frac{44}{17},\frac{66}{17},\frac{44}{17}\right).\end{aligned}$$



Aqui também não é necessário desenhar os vetores para calcular a projeção de um sobre o outro. O cálculo pode ser todo feito algebricamente, como no exemplo a seguir.

Ex.4: calcule a projeção do vetor $\vec{e} = (3,-3,2)$ sobre o vetor $\vec{f} = (3,-1,3)$.

Solução:

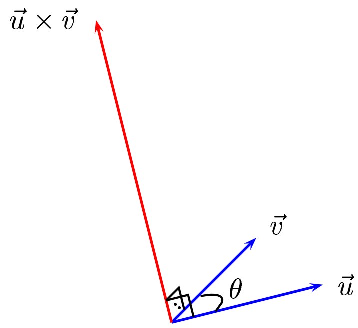
$$\begin{aligned}\vec{e}_f &= \frac{\vec{e}\cdot\vec{f}}{\vec{f}\cdot\vec{f}}\,\vec{f} = \frac{(3,-3,2)\cdot(3,-1,3)}{(3,-1,3)\cdot(3,-1,3)}\,(3,-1,3) = \frac{3.3+(-3)(-1)+2.3}{3.3+(-1)(-1)+3.3}\,(3,-1,3) = \frac{9+3+6}{9+1+9}\,(3,-1,3) = \\ &= \frac{18}{19}\,(3,-1,3) = \left(\frac{54}{19},-\frac{18}{19},\frac{54}{19}\right).\end{aligned}$$

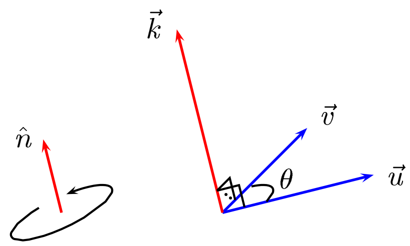
6.4 - Vetor ortogonal a dois vetores

Como vimos no capítulo 7, a definição do produto vetorial de um vetor $\vec{u}$ com um vetor $\vec{v}$ é

$$\vec{u}\times\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\,\mathrm{sen}\,\theta\ \hat{n},$$

onde θ é o ângulo entre os dois vetores e $\hat{n}$ é um versor ortogonal a ambos e cujo sentido é dado pela regra da mão direita.





Esta propriedade do versor $\hat{n}$ de ser ortogonal aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ pode ser usada em diversas aplicações onde precisamos de um vetor que seja ortogonal a dois outros. Como exemplo, consideremos que queiramos um vetor $\vec{w}$ de módulo $|\vec{w}| = w$ que seja ortogonal os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Tal vetor pode ser conseguido facimente multiplicando por $\pm w$ o versor $\hat{n}$ do produto vetorial de $\vec{u}$ com $\vec{v}$. Dependendo do sentido que queremos para o vetor $\vec{w}$, podemos multiplicar $\hat{n}$ por w ou $-w$. O resultado será um vetor de módulo w que é ortogonal aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, ou seja,

$$\vec{w} = \pm w\hat{n}.$$

Da fórmula do produto vetorial, temos que

$$\vec{u}\times\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\,\mathrm{sen}\,\theta\ \hat{n} \Rightarrow \frac{\vec{u}\times\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|\,\mathrm{sen}\,\theta} = \hat{n},$$

de modo que

$$\boxed{\vec{w} = \pm w\frac{\vec{u}\times\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|\,\mathrm{sen}\,\theta}.}$$

Uma forma mais simples de calcularmos $\hat{n}$ é a seguinte: consideremos um vetor

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v},$$

ortogonal aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e cujo sentido é dado pela regra da mão direita. O versor desse vetor $\vec{n}$ será o mesmo que aparece na definição do produto vetorial. Este pode ser calculado a partir do vetor $\vec{n}$ da seguinte forma:

$$\hat{n} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}.$$

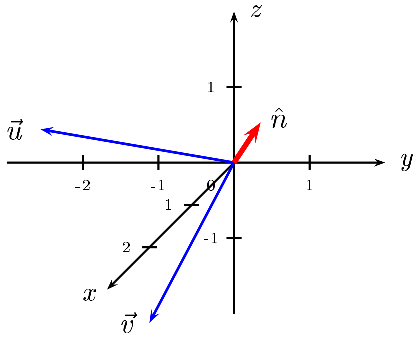
Temos, então, o seguinte:

$$\boxed{\vec{w} = \pm w\hat{n}, \quad \hat{n} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}.}$$

Ex.1: calcule o versor $\hat{n}$ que tem o mesmo sentido e direção que o produto vetorial $\vec{u} \times \vec{v}$, onde $\vec{u} = (1, -2, 1)$ e $\vec{v} = (2, 0, -1)$ e faça uma representação gráfica dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\hat{n}$.

Solução: primeiro, calculamos o vetor $\vec{n}$, dado por

$$\begin{aligned} \vec{n} &= \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (2\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 0\hat{k}) - (0\hat{\imath} - \hat{\jmath} - 4\hat{k}) = (2-0)\hat{\imath} + (2+1)\hat{\jmath} + (0+4)\hat{k} = \\ &= 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 4\hat{k} = (2, 3, 4). \end{aligned}$$



Agora, calculamos o módulo de $\vec{n}$:

$$|\vec{n}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 9 + 16} = \sqrt{29}.$$

Temos, então, que o versor $\hat{n}$ é dado por

$$\hat{n} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{(2, 3, 4)}{\sqrt{29}} = \left(\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{3}{\sqrt{29}}, \frac{4}{\sqrt{29}}\right) \approx (0,37\ ,\ 0,56\ ,\ 0,74).$$

Ex.2: calcule o versor $\hat{n}$ que tem o mesmo sentido e direção que o produto vetorial $\vec{a} \times \vec{b}$, onde $\vec{a} = (3, -1, 2)$ e $\vec{b} = (2, 1, 3)$.

Solução: primeiro, calculamos o vetor $\vec{n}$, dado por

$$\begin{aligned} \vec{n} &= \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + 3\hat{k}) - (3\hat{\imath} + 9\hat{\jmath} - 2\hat{k}) = (-3-3)\hat{\imath} + (4-9)\hat{\jmath} + (3+2)\hat{k} = \\ &= -6\hat{\imath} - 5\hat{\jmath} + 5\hat{k} = (-6, -5, 5). \end{aligned}$$

Agora, calculamos o módulo de $\vec{n}$:

$$|\vec{n}| = \sqrt{(-6)^2 + (-5)^2 + 5^2} = \sqrt{36 + 25 + 25} = \sqrt{86}.$$

Temos, então, que o versor $\hat{n}$ é dado por

$$\hat{n} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{(-6, -5, 5)}{\sqrt{86}} = \left(-\frac{6}{\sqrt{86}}, -\frac{5}{\sqrt{86}}, \frac{5}{\sqrt{86}}\right) \approx (-0,65\ ,\ -0,54\ ,\ 0,54).$$

Agora, usando o cálculo do versor $\hat{n}$, podemos também calcular vetores com outros módulos que também são ortogonais a dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Ex.3: calcule o vetor $\vec{w}$ de módulo 4 que é ortogonal aos vetores $\vec{u} = (2, -1, 1)$ e $\vec{v} = (1, -2, 0)$ e que tem o mesmo sentido que o produto vetorial $\vec{u} \times \vec{v}$ e faça uma representação gráfica dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

Solução: o vetor $\vec{w}$ tem módulo 4 e tem o mesmo sentido que o produto vetorial de $\vec{u} \times \vec{v}$. Portanto, ele é dado por

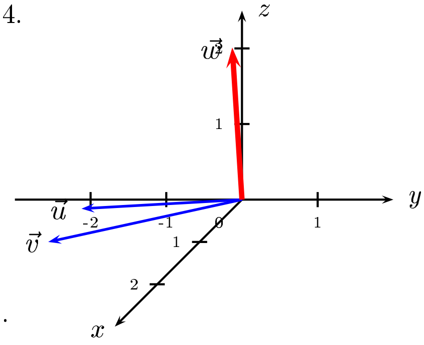
$$\vec{w} = 4\hat{n} \ ,$$

onde $\hat{n}$ é calculado a seguir:

$$\begin{aligned}\vec{n} &= \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (0\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 4\hat{k}) - (-2\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} - \hat{k}) = \\ &= (0+2)\hat{\imath} + (1-0)\hat{\jmath} + (-4+1)\hat{k} = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 3\hat{k} = (2, 1, -3).\end{aligned}$$

O módulo fica

$$|\vec{n}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-3)^2} = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}.$$



Temos, então, que o versor $\hat{n}$ é dado por

$$\hat{n} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{(2, 1, -3)}{\sqrt{14}} = \left(\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, -\frac{3}{\sqrt{14}} \right).$$

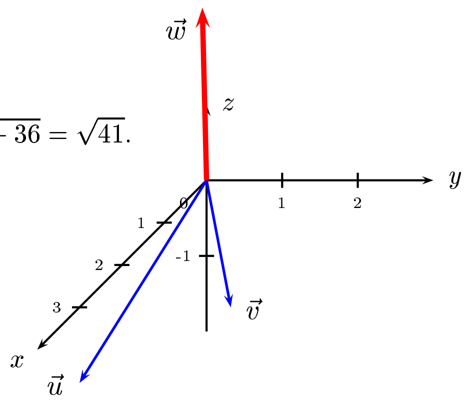
O vetor $\vec{w}$ é dado, então, por

$$\vec{w} = 4\left(\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, -\frac{3}{\sqrt{14}} \right) = \left(\frac{8}{\sqrt{14}}, \frac{4}{\sqrt{14}}, -\frac{12}{\sqrt{14}} \right) \approx (2,14 \ , \ 1,07 \ , \ 3,21).$$

Ex.4: calcule o vetor $\vec{w}$ de módulo 3 que é ortogonal aos vetores $\vec{a} = (3, 0, -1)$ e $\vec{b} = (1, 2, 0)$ e que tem o mesmo sentido que o produto vetorial $\vec{a} \times \vec{b}$.

Solução: o vetor $\vec{w}$ tem módulo 3 e tem o mesmo sentido que o produto vetorial de $\vec{a} \times \vec{b}$, de modo que ele é dado por $\vec{w} = 4\hat{n}$, onde $\hat{n}$ é calculado a seguir:

$$\begin{aligned}\vec{n} &= \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (0\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 6\hat{k}) - (-2\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} + 0\hat{k}) = (0+2)\hat{\imath} + (-1-0)\hat{\jmath} + (6-0)\hat{k} = \\ &= 2\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 6\hat{k} = (2, -1, 6) \ .\end{aligned}$$



O módulo fica

$$|\vec{n}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 6^2} = \sqrt{4+1+36} = \sqrt{41}.$$

Temos, então, que o versor $\hat{n}$ é dado por

$$\hat{n} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{(2, -1, 6)}{\sqrt{41}} = \left(\frac{2}{\sqrt{41}}, -\frac{1}{\sqrt{41}}, \frac{6}{\sqrt{41}} \right).$$

O vetor $\vec{w}$ é dado, então, por

$$\vec{w} = 3\left(\frac{2}{\sqrt{41}}, -\frac{1}{\sqrt{41}}, \frac{6}{\sqrt{41}} \right) = \left(\frac{6}{\sqrt{41}}, -\frac{3}{\sqrt{41}}, \frac{18}{\sqrt{41}} \right) \approx (0,94 \ , \ 0,47 \ , \ 2,81).$$

Ex.5: calcule o vetor $\vec{w}$ de módulo 6 que é ortogonal aos vetores $\vec{u} = (1, -2, 1)$ e $\vec{v} = (2, 0, -1)$ e que tem o sentido oposto ao do produto vetorial $\vec{u} \times \vec{v}$.

Solução: o vetor $\vec{w}$ tem módulo 6 e tem o sentido oposto ao do produto vetorial de $\vec{u} \times \vec{v}$, de modo que ele é dado por $\vec{w} = -6\hat{n}$. O versor $\hat{n}$ já foi calculado no exemplo 1 desta subseção, tendo sido obtido o seguinte resultado:

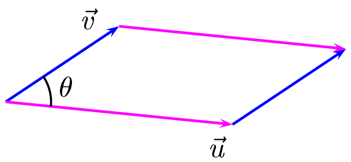
$$\hat{n} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \left(\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{3}{\sqrt{29}}, \frac{4}{\sqrt{29}}\right) \ .$$

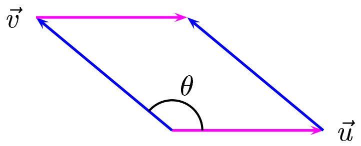
O vetor $\vec{w}$ é dado, então, por

$$\vec{w} = -6\left(\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{3}{\sqrt{29}}, \frac{4}{\sqrt{29}}\right) = \left(-\frac{12}{\sqrt{29}}, -\frac{18}{\sqrt{29}}, -\frac{24}{\sqrt{29}}\right) \approx (-2,23\ ,\ -3,34\ ,\ -4,46) \ .$$

6.5 - Área de um paralelogramo formado por dois vetores

Dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, podemos escolher representações desses vetores de modo que elas formem os lados de um paralelogramo. Existem dois casos a considerar: o primeiro é quando o ângulo entre os dois vetores é maior que 0^o e menor que 90^o e o segundo é quando o ângulo entre eles é maior que 90^o e menor que 180^o. Esses dois casos estão ilustrados a seguir.



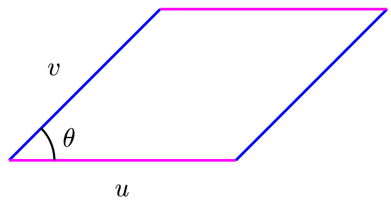


Como será demonstrado a seguir, a área de um paralelogramo formado por dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é dada por

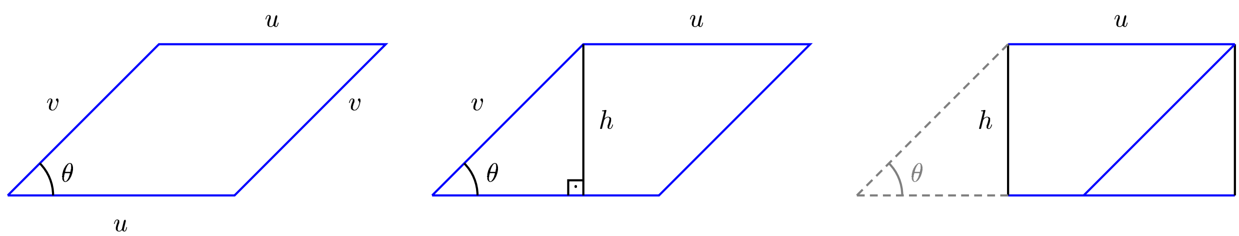
$$\boxed{A = |\vec{u} \times \vec{v}| \ .}$$

Demonstração:

consideremos primeiro o caso em que o ângulo entre os dois vetores é maior ou igual a 0^o e menor ou igual a 90^o (figura ao lado). Para simplificar as contas, escolhemos um dos vetores como sendo horizontal. Um dos lados desse paralelogramo tem comprimento $u = |\vec{u}|$ e o outro lado tem comprimento $v = |\vec{v}|$, sendo o ângulo de inclinação deste o mesmo ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.



Vamos, agora, calcular a área desse paralelogramo. Isto pode ser feito "cortando" a parte do paralelogramo indicada na figura abaixo e "colando" esta no lado oposto da figura, de modo a formar um retângulo. Esse retângulo, com base dada por u e altura h, tem a mesma área do paralelogramo do qual ele foi formado. A altura h é calculada a seguir.



$$\operatorname{sen}\theta = \frac{h}{v} \Rightarrow v\operatorname{sen}\theta = h \Rightarrow h = v\operatorname{sen}\theta .$$

A área A do retângulo formado (que é a mesma área do paralelogramo) é dada pela base×altura. Portanto,

$$A = u.h = u.v \operatorname{sen} \theta.$$

Agora, consideremos a definição do produto vetorial do vetor $\vec{u}$ com o vetor $\vec{v}$:

$$\vec{u} \times \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \operatorname{sen} \theta \ \hat{n} = u.v \operatorname{sen} \theta \ \hat{n} \ ,$$

onde $\hat{n}$ é um versor ortogonal a ambos os vetores, cujo sentido é dado pela regra da mão direita. O módulo desse produto vetorial é, então, dado por

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |u.v \operatorname{sen} \theta \ \hat{n}| = |u|.|v|| \operatorname{sen} \theta||\hat{n}| = u.v \, | \operatorname{sen} \theta||\hat{n}| \ .$$

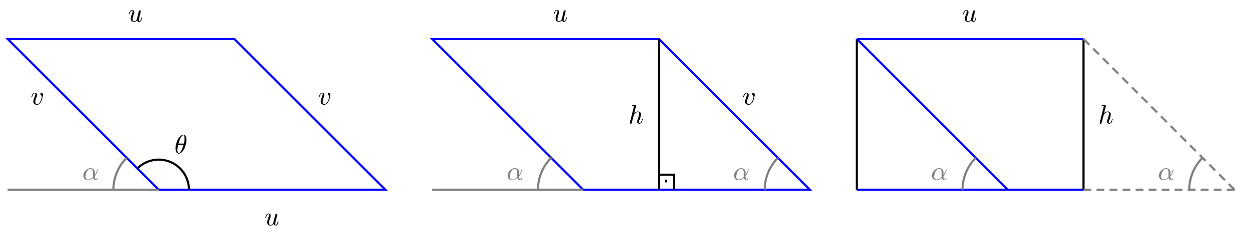
Como estamos considerando somente ângulos $0^o \leq \theta \leq 90^o$, o seno desses ângulos é sempre positivo, de modo que $| \operatorname{sen} \theta| = \operatorname{sen} \theta$. Como $|\hat{n}| = 1$ sempre, temos, então, que

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = u.v \operatorname{sen} \theta.$$

O lado direito da equação acima é justamente a fórmula para a área do paralelogramo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, de modo que temos

$$A = |\vec{u} \times \vec{v}| \ .$$

O caso em que o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é maior que 90^o (e menor que 180^o) é bastante semelhante. Dado um paralelogramo formado por representações desses vetores, podemos "cortar" um triângulo retângulo desse paralelogramo e "colá-lo" no lado oposto a este (figura seguinte). Esse triângulo tem um dos ângulos internos dado por $\alpha = 180^o - \theta$. O retângulo assim formado tem base $u = |\vec{u}|$ e altura $h = |\vec{v}| \operatorname{sen} \alpha = v \operatorname{sen} \alpha$.



A altura do triângulo é calculada da seguinte forma:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{h}{v} \Rightarrow v \operatorname{sen} \alpha = h \Rightarrow h = v \operatorname{sen} \alpha \ .$$

A área do retângulo assim formado fica, então,

$$A = u.h = u.v \operatorname{sen} \alpha.$$

Usando a fórmula do seno da soma de dois ângulos, $\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a. \cos b + \cos a. \operatorname{sen} b$, podemos calcular o seno de α em função do seno de θ:

$$\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen}(180^o - \theta) = \operatorname{sen} 180^o. \cos(-\theta) + \cos 180^o. \operatorname{sen}(-\theta).$$

Como $\operatorname{sen} 180^o = 0$ e $\cos 180^0 = -1$, temos

$$\operatorname{sen} \alpha = 0. \cos(-\theta) - 1. \operatorname{sen}(-\theta) = - \operatorname{sen}(-\theta) \ .$$

Como $\operatorname{sen}(-\theta) = - \operatorname{sen} \theta$ para qualquer ângulo θ, temos, então, que

$$\operatorname{sen} \alpha = -(- \operatorname{sen} \theta) = \operatorname{sen} \theta \ .$$

Substituindo o resultado acima para o cálculo da área do retângulo, temos

$$A = u.v \operatorname{sen} \theta \ .$$

O módulo do produto vetorial do vetor $\vec{u}$ com o vetor $\vec{v}$ é dado por

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|| \operatorname{sen} \theta| \ \hat{n} = u.v \, | \operatorname{sen} \theta| \ .$$

Como $\operatorname{sen} \theta$ é sempre positivo ou nulo para $90^o < \theta \leq 180^o$ e $|\hat{n}| = 1|$, temos que

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = u.v \operatorname{sen} \theta.$$

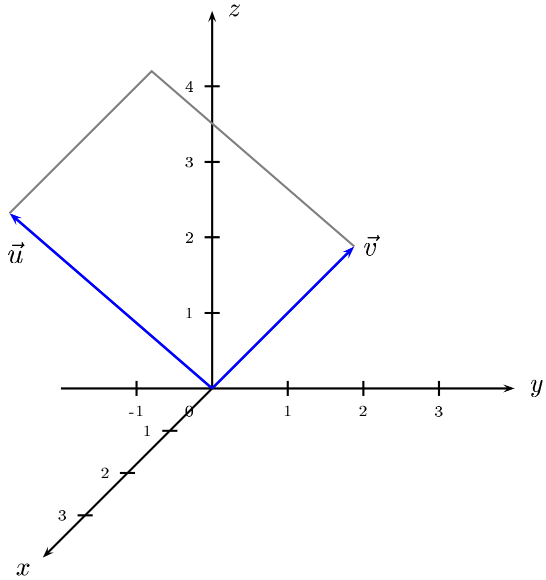
Comparando à fórmula para a área do retângulo (que é a mesma do paralelogramo formado pelas representações dos dois vetores), temos, novamente,
$$A = |\vec{u} \times \vec{v}| \ .$$

A seguir, usaremos esta fórmula em alguns exemplos.

Ex.1: calcule a área do paralelogramo formado pelos vetores $\vec{u} = (3, -1, 4)$ e $\vec{v} = (2, 3, 3)$ e represente o resultado graficamente.

Solução: a área do paralelogramo é dada por
$$A = |\vec{u} \times \vec{v}|.$$

Calculando o produto vetorial, temos
$$\begin{aligned}
\vec{u} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = (-3\hat{\imath} + 8\hat{\jmath}9\hat{k}) - (12\hat{\imath} + 9\hat{\jmath} - 2\hat{k}) = \\
&= (-3 - 12)\hat{\imath} + (8 - 9)\hat{\jmath} + (9 + 2)\hat{k} = \\
&= -15\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 11\hat{k} = (-15, -1, 11) \ .
\end{aligned}$$



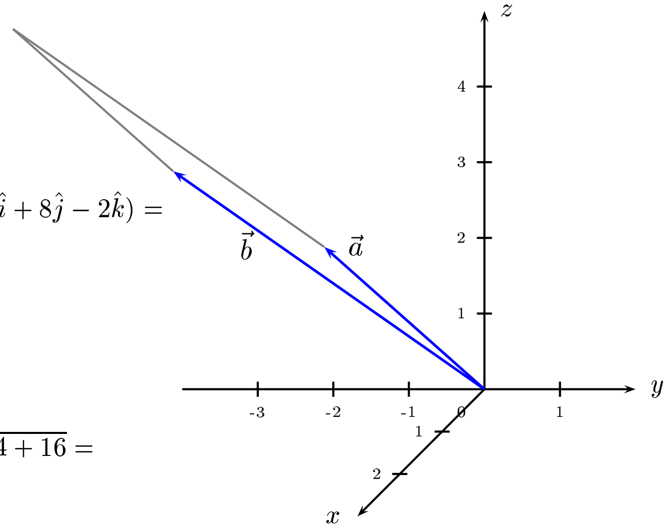
O módulo deste produto vetorial fica
$$\begin{aligned}
|\vec{u} \times \vec{v}| &= \sqrt{(-15)^2 + (-1)^2 + 11^2} = \sqrt{225 + 1 + 121} = \\
&= \sqrt{347} \approx 18,63 \ .
\end{aligned}$$

Temos, então, que
$$A = \sqrt{10}.$$

Ex.2: calcule a área do paralelogramo formado pelos vetores $\vec{a} = (2, -1, 3)$ e $\vec{b} = (2, -3, 4)$ e represente o resultado graficamente.

Solução: a área do paralelogramo é dada por
$$A = |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

Calculando o produto vetorial, temos
$$\begin{aligned}
\vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = (-4\hat{\imath} + 6\hat{\jmath} - 6\hat{k}) - (-9\hat{\imath} + 8\hat{\jmath} - 2\hat{k}) = \\
&= (-4 + 9)\hat{\imath} + (6 - 8)\hat{\jmath} + (-6 + 2)\hat{k} = \\
&= 5\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} - 4\hat{k} = (5, -2, -4) \ .
\end{aligned}$$



O módulo deste produto vetorial fica
$$\begin{aligned}
|\vec{a} \times \vec{b}| &= \sqrt{5^2 + (-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25 + 4 + 16} = \\
&= \sqrt{45} \approx 6,71 \ .
\end{aligned}$$

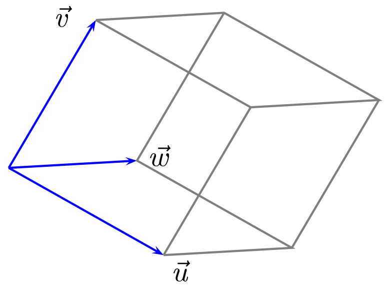
Temos, então, que
$$A = \sqrt{45}.$$

6.6 - Volume de um paralelepípedo formado por três vetores

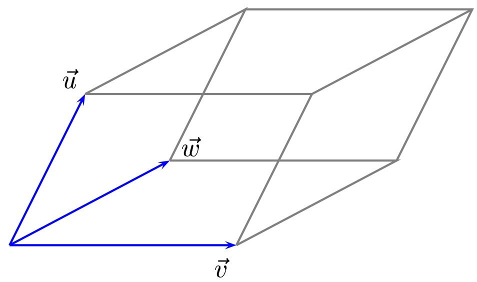
Dados três vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, podemos escolher representações desses vetores de modo que eles formem três lados de um paralelepípedo. O volume desse paralelepípedo está relacionado ao produto misto dos três vetores pela seguinte fórmula:

$$\boxed{V = |(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|}\ .$$

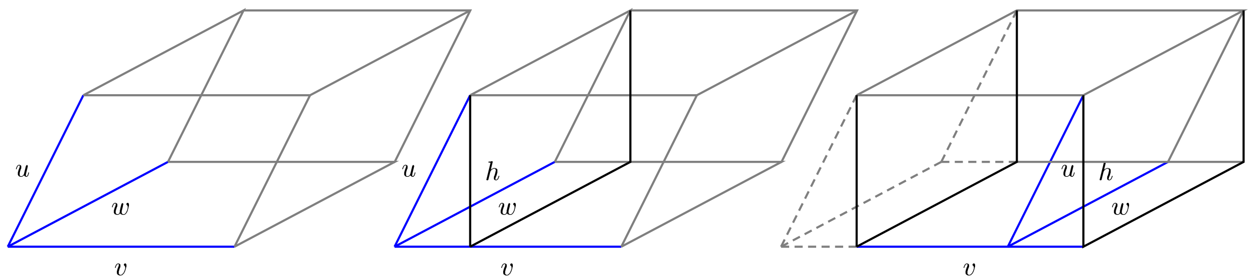
Como estamos usando o módulo, a seqüência em que os vetores aparecem não é importante.



Demonstração parcial: será feita agora uma demonstração para uma distribuição específica dos vetores e o resultado será generalizado para todos os outros casos. Os vetores serão tomados de modo que dois deles ($\vec{v}$ e $\vec{w}$) formam a base do paralelepípedo e o terceiro ($\vec{u}$) forma com $\vec{v}$ um plano que é ortogonal ao plano formado por $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Isto não é sempre o caso, mas facilitará a demonstração. Este caso particular é representado pela figura ao lado.

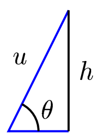


Podemos "cortar" o paralelepípedo oblíquo formado e "colar" a parte cortada de modo a formar um paralelepípedo reto, como indicado nas figuras a seguir.



Temos, então, um paralelepípedo reto onde a base é formada pelos vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ e a altura é dada por h. A área da base é a área de um paralelogramo formado por dois vetores, que já foi calculada na seção 6.5, sendo que o resultado obtido foi $A = |\vec{v} \times \vec{w}|$. Esta fórmula independe da disposição dos vetores que formam o paralelogramo e portanto é válida para todos os casos possíveis.

A altura h pode ser calculada utilizando trigonometria no triângulo retângulo ao lado, obtido nos cortes das figuras acima. A hipotenusa do triângulo é dada por $u = |\vec{u}|$ e ângulo θ é o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Utilizando a definição do seno de um ângulo, temos



$$\operatorname{sen}\theta = \frac{h}{u} \Rightarrow h = u \operatorname{sen}\theta\ .$$

Com isto, podemos calcular o volume do paralelepípedo, que é dado pela área da base A vezes a altura, isto é,

$$V = A.h = |\vec{v} \times \vec{w}|.u \operatorname{sen}\theta = u.|\vec{v} \times \vec{w}| \operatorname{sen}\theta\ .$$

O vetor $\vec{p} = \vec{v} \times \vec{w}$ é ortogonal à área do paralelogramo formado pelos vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Escrevendo a fórmula acima em termos do vetor $\vec{p}$, temos

$$V = u.p. \operatorname{sen}\theta\ ,$$

onde $p = |\vec{p}|$. No caso que estamos considerando, o vetor $\vec{p}$ forma um ângulo $\varphi = 90^o - \theta$ com o vetor $\vec{u}$, como indicado na figura a seguir. Deste modo, temos que $\theta = 90^o - \varphi$. Portanto,

$$\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}(90^o - \varphi)\ .$$

Utilizando a relação trigonométrica $\operatorname{sen}(90^o - \varphi) = \cos\varphi$ obtida na seção 1.7 do capítulo 1, temos que

$$\operatorname{sen}\theta = \cos\varphi \ .$$

Substituindo na expressão para o volume do paralelepípedo, temos

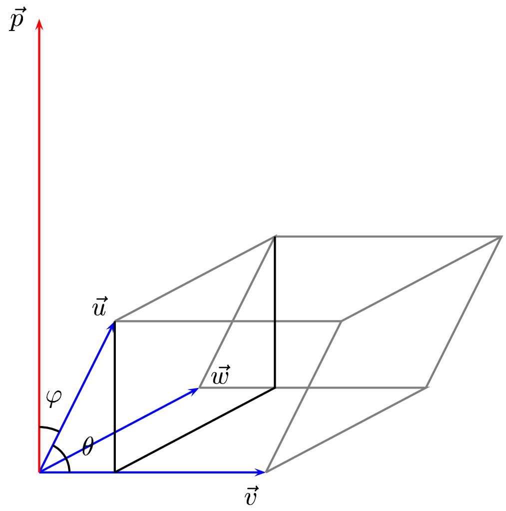
$$V = u.p.\cos\varphi \ .$$

Como φ é o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{p}$, a fórmula do volume equivale à definição do produto escalar entre o vetor $\vec{u}$ e o vetor $\vec{p}$, de modo que temos

$$V = \vec{u}\cdot\vec{p} = \vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) \ ,$$

que é a definição do produto misto $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$. Portanto, temos

$$V = (\vec{u},\vec{v},\vec{w}) \ .$$



Neste caso, como o ângulo φ é sempre menor que 90^o, de modo que $\cos\varphi \geq 0$, o resultado será sempre positivo. No caso mais geral, o resultado obtido envolverá o módulo do produto misto, o que era de se esperar, pois o volume não pode ser negativo. Obtemos, então a fórmula $V = |(\vec{u},\vec{v},\vec{w})|$.

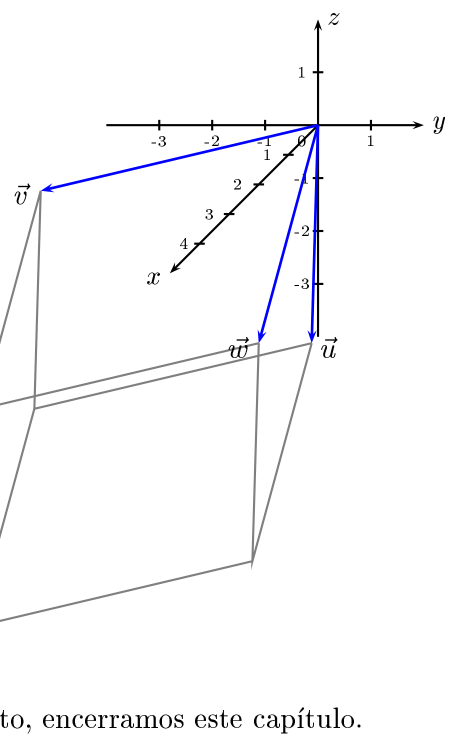
Ex.1: calcule o volume do paralelepípedo formado pelos vetores $\vec{u} = (2,1,-3)$, $\vec{v} = (4,-3,1)$ e $\vec{w} = (2,0,-3)$ e represente o resultado graficamente.

Solução: temos que $V = |(\vec{u},\vec{v},\vec{w})|$. Calculando o produto misto, temos

$$(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} =$$
$$= (18+2+0)-(0-12+18) = 20-6 = 14 \ .$$

Temos, então, que

$$V = |14| = 14.$$



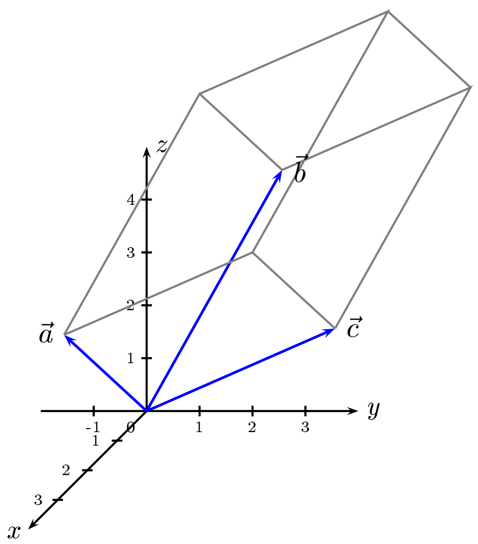
Ex.2: calcule o volume do paralelepípedo formado pelos vetores $\vec{a} = (1,-1,2)$, $\vec{b} = (-1,2,4)$ e $\vec{c} = (-1,3,1)$ e represente o resultado graficamente.

Solução: temos que $V = |(\vec{a},\vec{b},\vec{c})|$. Calculando o produto misto, temos

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$= (2+4-6)-(12+1-4) =$$
$$= 0-9 = -9 \ .$$

Temos, então, que

$$V = |-9| = 9.$$



Com isto, encerramos este capítulo.