1 - Introdução

Neste curso nós estudaremos as *equações diferenciais*, que são equações que envolvem derivadas de funções desconhecidas. Nosso estudo das equações diferenciais envolverá o aprendizado de diversas técnicas de resolução destas, o que significa descobrir qual é a função desconhecida de cada uma delas.

Ex.1: a expressão $\frac{dy}{dx}+3y=0$ é uma equação diferencial.

Ex.2: a expressão $\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+4=0$ é uma equação diferencial.

Ex.3: a expressão $x\frac{d^2x}{dt^2}-2t=0$ é uma equação diferencial.

Ex.4: a expressão $y^2-2y+4=0$ não é uma equação diferencial, pois não envolve derivadas da função desconhecida.

Equações diferenciais são muitíssimo usadas em física, química, engenharia, matemática, biologia, economia, negócios e outras áreas. Seu estudo possibilitou a maioria da tecnologia e ciência modernas. A seguir, estudaremos alguns exemplos de equações diferenciais encontradas em situações práticas.

1.1 - Exemplos preliminares

Vamos agora ver alguns exemplos de equações diferenciais que emergem em diversas áreas do conhecimento. Muitos desses problemas serão melhor estudados durante o curso.

Ex.1: consideremos uma partícula em movimento retilíneo, sendo que sua velocidade é proporcional ao dobro do espaço percorrido por ela mais uma velocidade inicial v_0. Temos, então, que

$$v=2x+v_0\ ,$$

onde v é a velocidade da partícula e x é o espaço percorrido por ela. Como $v=\frac{dx}{dt}$, temos

$$\frac{dx}{dt}=2x+v_0\ .$$

Essa equação envolve uma função desconhecida $(x(t))$ e sua derivada com relação ao tempo e portanto é uma equação diferencial.

Ex.2: vamos agora considerar o caso de um corpo de massa m suspenso por uma mola. Em sua posição de equilíbrio, a massa permanece parada e a tração da mola sobre o corpo é igual ao seu peso. Se comprimirmos ou esticarmos a mola, haverá uma força F que depende do tipo de mola que estamos usando. A *lei de Hooke* descreve a forma como podemos relacionar a força produzida pela compressão ou distenção da mola com a posição que o corpo acoplado a esta ocupa:

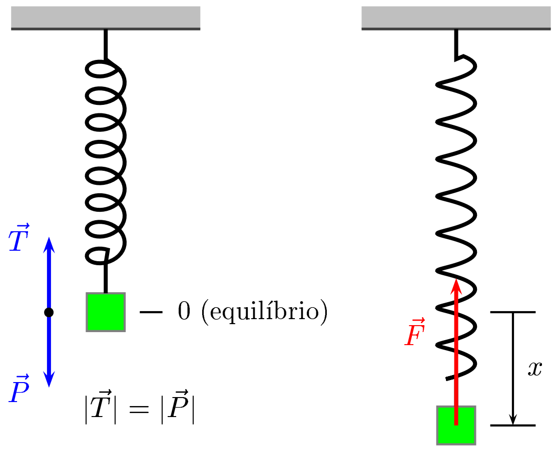
$$F = -kx \ ,$$

onde F é a força, k é chamada *constante da mola* e depende do tipo de mola (mais grossa, mais fina, longa ou curta, material de que é feita, etc.) e x é a posição do corpo com relação ao ponto de equilíbrio. De acordo com a segunda lei de Newton, $F = ma$, onde m é a massa do corpo acoplado à mola e a é a sua aceleração. Portanto,

$$ma = -kx \ .$$

Como a aceleração é a derivada segunda da posição com relação ao tempo, temos, então, a equação diferencial

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \ .$$

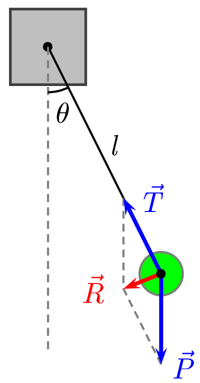


Ex.3: consideremos agora um pêndulo consistindo de um corpo de massa m acoplado a uma barra de massa muito pequena (de modo que podemos considerá-la zero) e comprimento l presa em uma de suas extremidades. Esse sistema está disposto de modo que o movimento do corpo está restrito a um plano.

Tal corpo está sujeito à força peso $\vec{P}$ devida à sua massa e a uma força de tração $\vec{T}$ exercida sobre ele pela barra. A força resultante da ação dessas duas forças, $\vec{R} = \vec{P} + \vec{T}$, dá origem ao movimento do pêndulo, que será descrito pela variação do ângulo da barra com relação a um eixo vertical colocado no ponto onde a barra está fixa.

Considerando a lei de conservação do momento angular (conforme o curso de Física), pode-se deduzir a seguinte equação diferencial para a variação com relação ao tempo do ângulo θ de inclinação da barra com o eixo vertical:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\,\mathrm{sen}\,\theta \ .$$



Ex.4: em biologia, no estudo de populações que crescem sem limitações físicas, como no caso de colônias de bactérias crescendo em laboratório ou de uma espécie que não tem predadores ou limitações de comida, podemos dizer que a variação da população com o tempo depende da quantidade de indivíduos existentes. Quanto mais indivíduos houver, maior será a procriação. Com base nesta idéia pode ser montada a equação da proliferação ilimitada de uma determinada população:

$$\frac{dP}{dt} = kP \ ,$$

onde P é a população como função do tempo t e k é uma constante positiva chamada *taxa de procriação* que varia de acordo com o ambiente em que a população vive e com a espécie com que se está lidando.

Ex.5: no caso de populações que encontram limitações para o seu crescimento, seja pela falta de comida ou pela existência de predadores, uma equação que aproxima bastante bem o desenvolvimento destas com o tempo é a chamada *equação logística*, dada por

$$\frac{dP}{dt} = kP - lP^2 ,$$

onde P é a população como função do tempo t, k é a taxa de procriação e l é uma constante que indica o grau de limitação que a população sofrerá. Ela regula a influência do termo P^2, que torna-se mais importante conforme a população cresce, imitando, por exemplo, a escassez de alimento resultante dessa expansão.

Ex.6: um outro exemplo de alicação de equações diferenciais é no cálculo de juros compostos (juros sobre juros) de empréstimos ou aplicações financeiras. Suponhamos que alguém depositou uma certa quantia S de dinheiro na poupança e que esta tenha uma taxa de rentabilidade r a cada ano e que o lucro seja calculado mês a mês. No final de um mês, essa pessoa terá mais dinheiro do que havia depositado. Como a renda é calculada sobre o dinheiro que está na poupança, se o indivíduo não retirar parte do dinheiro investido a renda do mês seguinte será maior. Se o dinheiro ficar aplicado tempo suficiente, a pessoa terá um valor muito maior do que depositou inicialmente.

Agora, vamos supor que a renda fosse calculada diariamente, como ocorre em certas aplicações financeiras. E se ela fosse calculada minuto a minuto? No limite em que os juros compostos são calculados de forma contínua, teremos a seguinte equação diferencial:

$$\frac{dS}{dt} = rS ,$$

onde S é o saldo em função do tempo t e r é a taxa anual de juros.

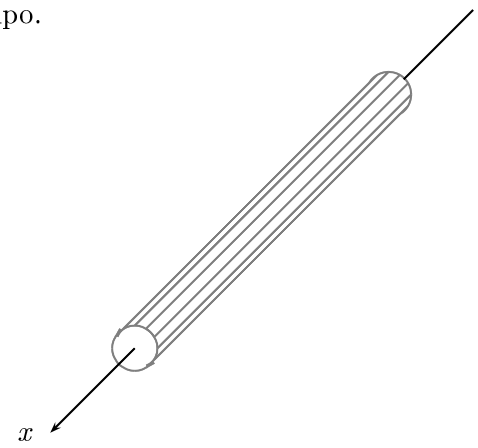
Obs.: note a semelhança entre as equações obtidas nos exemplos 4 e 6, que tratam de assuntos bem diferentes.

Ex.7: como último exemplo, vamos considerar a condução de calor em uma barra metálica bastante fina e longa. A temperatura em cada ponto da barra será uma função da posição desse ponto e também do tempo. No caso de uma barra fina e longa, podemos considerar a temperatura como dependendo somente da posição do ponto sobre o eixo da barra e do tempo. A temperatura é, então, uma função de duas variáveis $u = u(x,t)$, onde x é a posição ao longo do eixo da barra e t é o tempo.

A equação diferencial que descreve a distribuição de temperatura na barra em função do tempo envolve derivadas com relação às variáveis x e t:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t} ,$$

onde k é uma constante que depende do tipo de material de que a barra é feita. Podemos ver, então, que esta equação diferencial envolve derivadas parciais.



Nesta seção nós vimos diversos tipos de equações diferenciais. Pode-se notar diferenças e semelhanças entre elas. O estudo das equações diferenciais fica mais simples se as classificarmos de acordo com suas características. É isto que será feito na seção seguinte.

1.2 - Classificação

Equações diferenciais podem ser classificadas em vários tipos. Essa classificação é útil para o desenvolvimento de técnicas para a sua resolução.

a) Equações diferenciais ordinárias e equações diferenciais parciais

A primeira distinção que faremos será entre *equações diferenciais ordinárias* e *equações diferenciais parciais*. Equações diferenciais ordinárias envolvem somente derivadas simples e equações diferenciais parciais envolvem derivadas parciais. As equações diferenciais dos exemplos 1 a 6 da seção anterior são ordinárias. Já a equação diferencial do exemplo 7 é parcial.

Ex.1: as equações

$$\frac{dy}{dx} - y = 0 \quad , \quad \frac{dy}{dx} - 4y^2 = 0 \quad , \quad \frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0 \quad , \quad \frac{dx}{dt} - 4x = 0 \quad , \quad \frac{d^3y}{dx^3} - 4\,\text{sen}\, y = 0$$

são equações diferenciais ordinárias.

Ex.2: as equações

$$\frac{\partial h}{\partial x} - 3\frac{\partial h}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} - 4u = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - 4\frac{\partial y}{\partial y} = 0$$

são equações diferenciais parciais.

Obs.: é comum chamar equações diferenciais ordinárias de EDOs. As equações diferenciais parciais também são chamadas EDPs.

b) Ordem

Uma outra forma de classificar equações diferenciais é pela *ordem*. A ordem de uma equação diferencial (ordinária ou parcial) é o grau da derivada de ordem maior na equação.

Ex.1: a equação diferencial $\frac{dy}{dx} - y = 0$ é de 1^a ordem.

Ex.2: a equação diferencial $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0$ é de 2^a ordem.

Ex.3: a equação diferencial $\frac{d^3x}{dt^3} + 4\frac{dx}{dt} - 4x = 0$ é de 3^a ordem.

Ex.4: a equação diferencial $\frac{\partial u}{\partial t} - k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ é de 2^a ordem.

Ex.5: a equação diferencial $\frac{dy}{dx} - 3y^2 = 0$ é de 1^a ordem.

Ex.6: a equação diferencial $\frac{d^ny}{dx^n} + \frac{d^2y}{dx^2} - 2xy = 0$, $n > 2$, é de ordem n .

É comum usar a notação $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$, $y''' = \frac{d^3y}{dx^3}$ para designar as derivadas de uma função y com relação a uma variável x. No caso de derivadas de ordens maiores que 3, usa-se a notação $y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}$, como por exemplo em $y^{(4)} = \frac{d^4y}{dx^4}$ e $y^{(5)} = \frac{d^5y}{dx^5}$.

Ex.7: a equação diferencial $y' - 3xy + 4 = 0$ é de 1^a ordem.

Ex.8: a equação diferencial $y'' + 3y' - 3y = 0$ é de 2^a ordem.

Ex.9: a equação diferencial $(y')^2 + 4x^2y = 0$ é de 1^a ordem.

Ex.10: a equação diferencial $\operatorname{sen} y'' + 6y' - 4y = 0$ é de 2^a ordem.

Ex.11: a equação diferencial $y^{(5)} - 3y'' + 4y = 0$ é de 5^a ordem.

Segundo essa classificação, as equações diferenciais dos exemplos 1, 4, 5 e 6 da seção anterior são de primeira ordem e as equações diferenciais dos exemplos 2, 3 e 7 são de segunda ordem.

c) Equações diferenciais lineares e equações diferenciais não-lineares

Uma distinção de muita importância entre equações diferenciais é entre *equações diferenciais lineares* e *equações diferenciais não-lineares*. Equações diferenciais lineares são aquelas que envolvem somente funções lineares da função que se quer determinar e de suas derivadas. Funções lineares são aquelas que envolvem somente a soma e a multiplicação por um número real ou uma função somente da variável independente x.

No caso de equações diferenciais ordinárias, as equações são lineares quando podem ser escritas como

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_3(x)y''' + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \ ,$$

onde $a_n(x)$, $a_{n-1}(x)$, ... , $a_1(x)$, $a_0(x)$ e $f(x)$ são funções da variável independente x. Note que essas funções também podem ser constantes ou nulas.

Quando a equação diferencial envolver funções não-lineares da função que se quer determinar ou de qualquer uma de suas derivadas ela é uma equação diferencial não-linear.

Ex.1: a equação diferencial $y'' - 3y' + 2y = 0$ é linear, pois envolve somente termos lineares da função y e de suas derivadas.

Ex.2: a equação diferencial $y'' + 3y' - y^2 = 0$ é não-linear, pois envolve um termo quadrático da função y.

Ex.3: a equação diferencial $3y'' + (y')^3 - 2y = 0$ é não-linear, pois envolve um termo cúbico da primeira derivada função y.

Ex.4: a equação diferencial $y'' - 3y' + 2y = x$ é linear, pois envolve somente termos lineares da função y e de suas derivadas.

Ex.5: a equação diferencial $3y' + 2y = 4x^3$ é linear, pois envolve somente termos lineares da função y e de suas derivadas. Lembremos que para a classificação de linear ou não linear, somente importa a linearidade dos termos dependentes da função y e de suas derivadas.

Ex.6: a equação diferencial $y''' - 3y' + 2xy = 0$ é linear, pois envolve somente termos lineares da função y e de suas derivadas.

Ex.7: a equação diferencial $y' - 2\operatorname{sen} y = 0$ é não-linear, pois envolve o seno da função y.

Ex.8: a equação diferencial $3y'' - 3e^{y'} + 2y - 3x + 4 = 0$ é não-linear pois envolve a exponencial da primeira derivada da função y.

Ex.9: a equação diferencial $y' \operatorname{sen} x^3 - y + 2e^x = 0$ é linear, pois envolve somente termos lineares da função y e de suas derivadas.

No caso de equações diferenciais parciais, quando houver uma função de n variáveis $u(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, elas serão lineares quando tiverem a forma

$$a_{mn}(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial^n u}{\partial x_m^n} + \ldots a_{m1}(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_m} + \cdots + a_{1n}(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial^n u}{\partial x_1^n} + \ldots a_{11}(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1} +$$
$$+ a(x_1, \ldots, x_n)u = f(x_1, \ldots, x_n) \ ,$$

onde os coeficientes $a_{mn}, \ldots a_{11}$, são funções somente das variáveis independentes $x_1, \ldots, x_n$, o mesmo valendo para o coeficiente a e a função f.

Ex.10: a equação diferencial $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial^2 y} = -k^2 \psi$ é linear, pois envolve somente termos lineares da função ψ e de suas derivadas parciais.

Ex.11: a equação diferencial $\frac{\partial u}{\partial x} - \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 = 0$ é não-linear, pois envolve um termo quadrático da derivada parcial da função u com relação à variável t.

A distinção entre equações diferenciais lineares e não-lineares é importante porque é muito difícil acharmos soluções para equações diferenciais não-lineares (ordinárias ou parciais). Ainda hoje a matemática não dispõe de muitas técnicas eficazes na resolução desse tipo de equações.

d) Equações diferenciais homogêneas e equações diferenciais não-homogêneas

Dada uma equação diferencial ordinária onde temos uma função indeterminada $y(x)$, onde x é a sua variável independente, e algumas de suas derivadas, dizemos que a equação diferencial é homogênea quando todos os termos desta têm uma dependência de y ou de suas derivadas.

Ex.1: a equação diferencial $y'' + 4y' - 3y = 0$ é homogênea.

Ex.2: a equação diferencial $y'' + 4y' - 3y^2 + 4x = 0$ é não-homogênea, pois possui um termo que só depende da variável independente x.

Ex.3: a equação diferencial $y'' + 4y' - 3y^2 + 4xy = 0$ é homogênea, pois o termo x aparece dentro de uma expressão dependente de y.

Ex.4: a equação diferencial $y'' + 4x^2 y' - 3y = 0$ é homogênea, pois o termo x^2 aparece dentro de uma expressão dependente de y'.

Ex.5: a equação diferencial $y'' + 4y' - 3y + 3 \operatorname{sen} x = 0$ é não-homogênea.

Ex.6: a equação diferencial $y' - 8y + 2 = 0$ é não-homogênea, pois aparece um termo constante indepedente de y ou de suas derivadas.

No caso de equações diferenciais parciais (ou *equações a derivadas parciais*, como preferem muitos matemáticos), temos funções que podem depender de mais de uma variável, $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Neste caso, uma equação diferencial será homogênea quando houver somente termos dependentes da função u ou de algumas de suas derivadas parciais.

Ex.7: a equação diferencial $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 3\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ é homogênea.

Ex.8: a equação diferencial $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial^2 y} = -k^2$ é não-homogênea, pois envolve uma constante independente da função ψ.

Ex.9: a equação diferencial $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial^2 y} = -k^2\psi$ é homogênea.

Observe que uma equação pode ser linear e não-homogênea, ou não-linear e homogênea, ou parcial e não-linear, pois uma classificação independe da outra.

Vamos, agora, classificar as equações diferenciais vistas na seção 1.1.

Ex.10: classifique a equação diferencial do exemplo 1 da seção 1.1.

Solução: A equação diferencial do exemplo 1 da seção 1.1, do movimento retilíneo de uma partícula, é dada por $\frac{dx}{dt} = 2x + v_0$. Ela é uma equação diferencial ordinária de primeira ordem linear e não-homogênea.

Ex.11: classifique a equação diferencial do exemplo 2 da seção 1.1.

Solução: A equação diferencial do exemplo 2 para um corpo suspenso por uma mola foi dada por $m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$. Ela é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem linear e homogênea.

Ex.12: classifique a equação diferencial do exemplo 3 da seção 1.1.

Solução: A equação diferencial do exemplo 3, do pêndulo, dada por $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\,\text{sen}\,\theta$, é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem não-linear e homogênea.

Ex.13: classifique a equação diferencial do exemplo 4 da seção 1.1.

Solução: A equação diferencial do exemplo 4, lidando com populações ilimitadas em seu crescimento, $\frac{dP}{dt} = kP$, é uma equação diferencial ordinária de primeira ordem linear e homogênea.

Ex.14: classifique a equação diferencial do exemplo 5 da seção 1.1.

Solução: A equação logística do exemplo 5, dada por $\frac{dP}{dt} = kP - lP^2$ é uma equação diferencial ordinária de primeira ordem não-linear e homogênea.

Ex.15: classifique a equação diferencial do exemplo 6 da seção 1.1.

Solução: A equação dos juros compostos no exemplo 6, dada por $\frac{dS}{dt} = rS$, é uma equação diferencial ordinária de primeira ordem linear e homogênea.

Ex.16: classifique a equação diferencial do exemplo 7 da seção 1.1.

Solução: A equação da condução do calor do exemplo 7, dada por $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}$, é um exemplo de equação diferencial parcial de segunda ordem linear e homogênea.

1.3 - Soluções

A solução de uma equação diferencial é uma função que pode ser derivada quantas vezes for necessário pela equaçã diferecial (dentro dos limites do domínio dessa equação) e que a satisfaça. A seguir, veremos três exemplos de soluções de equações diferenciais.

Ex.1: resolva a equação diferencial $y' - y = 0$.

Solução: esta equação pode ser escrita como $y' = y$. Portanto, ela é uma função cuja derivada é ela mesma. Uma função com esta propriedade é a exponencial. Portanto, podemos dizer que

$$y = e^x$$

é solução da equação diferencial. Substituindo no lado esquerdo da equação diferencial, temos

$$y' - y = e^x - e^x = 0\ ,$$

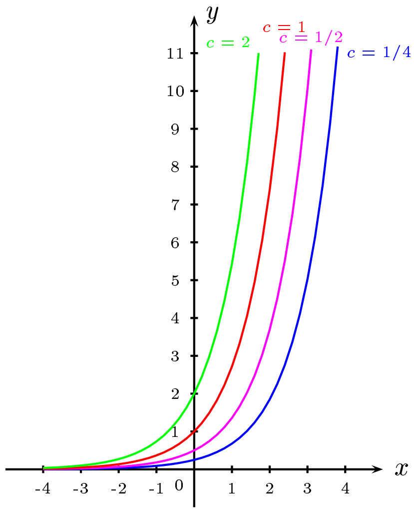
provando que ela é realmente uma solução desta.

No entanto, esta não é a única solução possível. Tentemos a função $y = 3e^x$. Temos $y' = 3e^x$, de modo que

$$y' - y = 3e^x - 3e^x = 0\ .$$

Portanto, $y = 3e^x$ também é uma solução da equação diferencial $y' - y = 0$. O mesmo vale para $y = 2e^x$, $y = \frac{1}{5}e^x$, $y = \sqrt{2}e^x$ ou, de modo geral, para $y = ce^x$, onde c é uma constante real arbitrária.

Portanto, não existe somente uma, mas uma família de infinitas soluções da equação diferencial $y' - y = 0$. Os gráficos ao lado mostram algumas dessas soluções.



Ex.2: resolva a equação diferencial $y'' + y = 0$.

Solução: esta equação pode ser escrita como $y'' = -y$. Portanto, estamos procurando uma função cuja segunda derivada resulta nela mesma multiplicada por -1. Uma função desse tipo é $y = \operatorname{sen} x$, pois

$$y = \operatorname{sen} x \Rightarrow y' = \cos x \Rightarrow y'' = -\operatorname{sen} x\ .$$

Substituindo no lado esquerdo da equação diferencial, temos

$$y'' + y = -\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x = 0\ .$$

Portanto, esta é uma solução da equação diferencial. No entanto, a função $y = \cos x$ também é solução da equação diferencial, pois

$$y = \cos x \Rightarrow y = -\operatorname{sen} x \Rightarrow y = -\cos x\ .$$

Substituindo no lado esquerdo da equação diferencial,

$$y'' + y = -\cos x + \cos x = 0\ .$$

De um modo geral, qualquer função do tipo

$$y = a \operatorname{sen} x + b \cos x\ ,$$

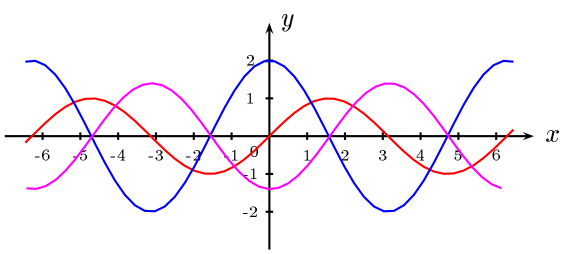
onde a e b são constantes reais, é solução da equação diferencial $y'' + y = 0$. Isto porque

$$y = a \operatorname{sen} x + b \cos x \Rightarrow y' = a \cos x - b \operatorname{sen} x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y'' = -a \operatorname{sen} x - b \cos x\ ,$$

de modo que

$$y'' + y = -a \operatorname{sen} x - b \cos x + a \operatorname{sen} x + b \cos x = 0\ .$$

Algumas dessas soluções estão representadas no gráfico ao lado.



Ex.3: resolva a equação diferencial $y' - y^2 = 0$.

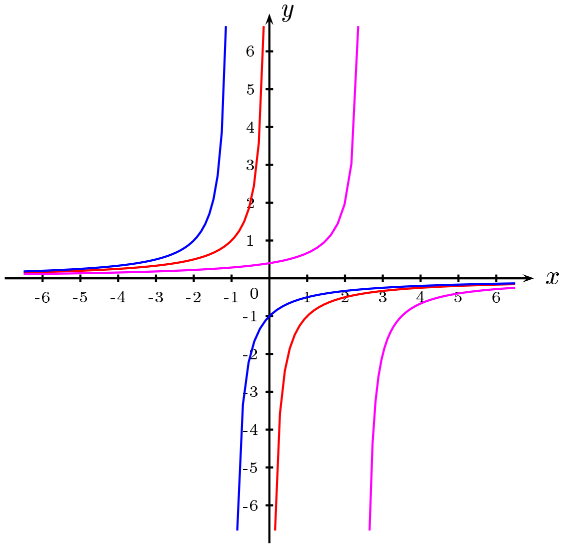
Solução: podemos escrever esta equação diferencial como $y' = y^2$. Portanto, estamos procurando uma função cuja derivada seja o quadrado dela mesma. Uma função com esta propriedade é $y = -\frac{1}{x}$, pois

$$y = -\frac{1}{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{x^2} = \left(\frac{1}{x}\right)^2 = y^2 \ .$$

No entanto, esta não é a única solução, pois qualquer função do tipo $y = -\frac{1}{x-c}$, onde c é uma constante real arbitrária, satisfaz a equação diferencial pois

$$y = -\frac{1}{x-c} \Rightarrow y' = -\frac{1}{(x-c)^2} = \left(\frac{1}{x-c}\right)^2 = y^2 \ .$$

Algumas dessas soluções estão representadas no gráfico ao lado.



Pode-se notar dos exemplos acima que equações diferenciais podem ter inúmeras soluções possíveis. Podemos representar essas soluções por meio da *solução geral*, que é definida como sendo uma função envolvendo uma ou mais constantes que é solução da equação diferencial, sendo que todas as soluções desta podem ser obtidas através de escolhas de valores para essas constantes. Às soluções obtidas fixando valores para as constantes arbitrárias das soluções gerais é dado o nome de *soluções particulares* da equação diferencial.

Ex.4: a função $y = ce^x$, onde c é uma constante arbitrária, é a solução geral da equação diferencial $y' - y = 0$. As funções $y = e^x$, $y = 2e^x$ e $y = \frac{1}{2}e^x$ são soluções particulares da euqação diferencial e podem ser obtidas da solução geral através de escolhas para a constante c.

Ex.5: a função $y = a \operatorname{sen} x + b \cos x$, onde a e b são constantes arbitrárias, é a solução geral da equação diferencial $y'' + y = 0$. As funções $y = \operatorname{sen} x$, $y = 2\cos x$ e $y = \operatorname{sen} x - 3\cos x$ são soluções particulares da equação diferencial e podem ser obtidas da solução geral através de escolhas para as constantes a e b.

Ex.6: a função $y = -\frac{1}{x-c}$, onde c é uma constante arbitrária, é a solução geral da equação diferencial $y' - y^2 = 0$. As funções $y = -\frac{1}{x}$, $y = -\frac{1}{x-1}$ e $y = -\frac{1}{x+2}$ são soluções particulares da equação diferencial e podem ser obtidas da solução geral através de escolhas para a constante c.

1.4 - Problemas de valores de contorno

Vamnos, agora, considerar uma partícula que obedece a uma equação diferencial, como a do exemplo 1 da seção 1.1. A solução geral dessa equação diferencial dá origem a um número infinito de soluções particulares, sendo cada uma delas correspondente a uma possível trajetória para a partícula. Sabemos que partículas na mecânica clássica não seguem infinitas trajetórias ao mesmo tempo (isto já não é verdade para a mecânica quântica). Por isso, deve existir uma forma de determinar somente uma solução particular para um problema físico. Isto se faz aplicando-se *condições de contorno*, que são informações extras que ajudam a determinar as constantes existentes nas soluções gerais de equações diferenciais. No caso do movimento de uma partícula, podemos saber a sua posição em um determinado instante de tempo. Essa condição extra determina somente uma solução para a equação deiferencial e, portanto, somente uma trajetória possível para a partícula.

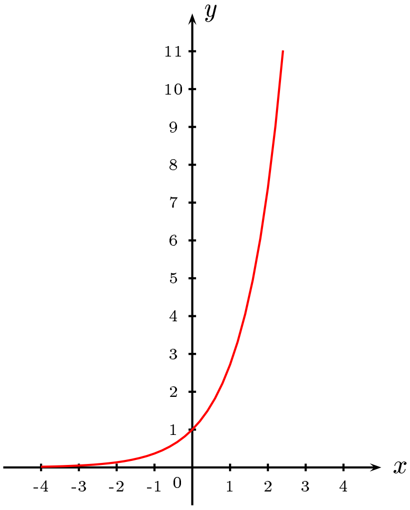
Nos exemplos seguintes, veremos algumas aplicações dessas condições de contorno.

Ex.1: resolva a equação diferencial $y' - y = 0$, onde $y(0) = 1$.

Solução: já vimos na seção anterior que a solução geral para esta equação diferencial é dada pela função $y = c\,e^x$, onde c é uma constante real arbitrária. A condição de contorno fornecida pelo problema é que $y(0) = 1$. Aplicando esta condição à solução geral, temos

$$y(0) = 1 \Rightarrow c\,e^0 = 1 \Rightarrow c.1 = 1 \Rightarrow c = 1 \ .$$

Portanto, aplicando a condição de contorno, obtemos a solução particular $y = 1.\,e^x = e^x$. Esta é a única solução que satisfaz a equação diferencial e a condição de contorno fornecida pelo problema. A solução deste problema é representada no gráfico abaixo.

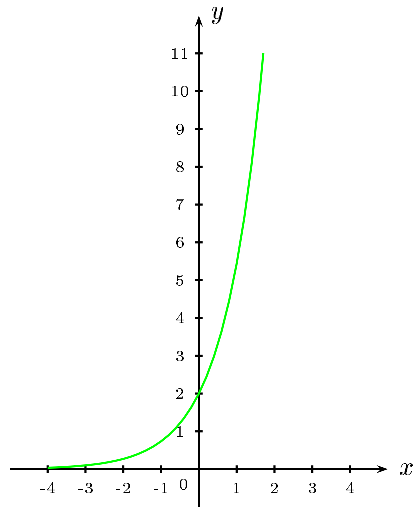


Ex.2: resolva a equação diferencial $y' - y = 0$, onde $y(0) = 2$.

Solução: a solução geral para esta equação diferencial é dada por $y = c\,e^x$, onde c é uma constante real arbitrária, e a condição de contorno fornecida pelo problema é que $y(0) = 2$ Aplicando esta condição à solução geral, temos

$$y(0) = 2 \Rightarrow c\,e^0 = 2 \Rightarrow c.1 = 2 \Rightarrow c = 2 \ .$$

Portanto, a condição de contorno determina a solução particular $y = 2\,e^x$. Esta solução está representada no gráfico abaixo.



Em geral, equações diferenciais de primeira ordem necessitam de uma condição de contorno para determinar uma única solução. No caso de equações diferenciais de segunda ordem, em geral são necessárias duas condições de contorno para determinar uma solução única, conforme o exemplo a seguir.

Ex.3: resolva a equação diferencial $y'' + y = 0$, onde $y(0) = 1$ e $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Solução: como já vimos na seção anterior, a solução geral dessa equação diferencial é dada por

$$y = a\,\text{sen}\,x + b\cos x \ ,$$

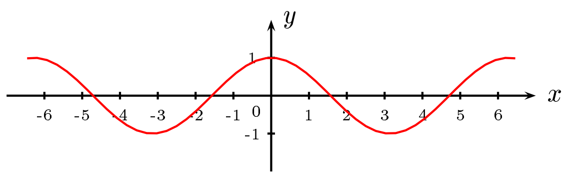
onde a e b são constantes reais. Aplicando as condições de contorno, temos

$$y(0) = 1 \Rightarrow a\,\text{sen}\,0 + b\cos 0 = 1 \Rightarrow a.0 + b.1 = 1 \Rightarrow b = 1 \ ,$$
$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow a\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2} + b\cos\frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow a.1 + b.0 = 0 \Rightarrow a = 0 \ .$$

Portanto, determinamos que $a = 0$ e $b = 1$. Substituindo na solução geral, obtemos a solução particular

$$y = 0\,\text{sen}\,x + 1 cosx \Rightarrow y = \cos x \ .$$

Esta solução está representada no gráfico ao lado.



Condições de contorno podem ser impostas sobre a função ou sobre suas derivadas, como no caso de uma partícula em movimento onde condições são impostas sobre a sua velocidade (a derivada de sua posição) em determinado instante de tempo. O exemplo seguinte ilustra um caso desse tipo.

Ex.4: resolva a equação diferencial $y'' + y = 0$, onde $y(0) = 1$ e $y'(0) = 2$.

Solução: a solução geral dessa equação diferencial é dada por

$$y = a \operatorname{sen} x + b \cos x \ ,$$

onde a e b são constantes reais. Podemos ver que uma das condições de contorno envolve a derivada da função y. Por isso, precisamos calcular essa derivada:

$$y' = a \cos x - b \operatorname{sen} x \ .$$

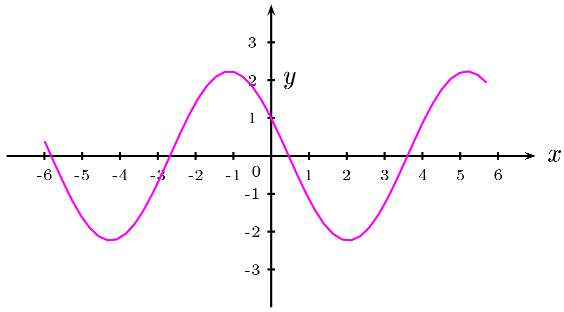
Aplicando, então, as condições de contorno, temos

$$y(0) = 1 \Rightarrow a \operatorname{sen} 0 + b \cos 0 = 1 \Rightarrow a.0 + b.1 = 1 \Rightarrow b = 1 \ ,$$
$$y'(0) = 2 \Rightarrow a \cos 0 - b \operatorname{sen} 0 = 2 \Rightarrow a.1 + b.0 = 2 \Rightarrow a = 2 \ .$$

Portanto, determinamos que $a = 2$ e $b = 1$. Substituindo na soluçã geral, obtemos a solução particular

$$y = 2 \operatorname{sen} x + 1 cos x \Rightarrow y = 2 \operatorname{sen} x + \cos x \ .$$

Esta solução está representada no gráfico ao lado.



Também pode ocorrer que a condição de contorno não consegue determinar uma solução única. Isto é exemplificado a seguir.

Ex.5: resolva a equação diferencial $y' - y^2 = 0$, onde $\lim_{x \to \infty} y(x) = 0$.

Solução: a solução, como foi visto na seção anterior, é dada por $y = -\frac{1}{x-c}$, onde c é uma constante real arbitrária. Aplicando a condição de contorno, temos

$$\lim_{x \to \infty} y(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to \infty} \left(-\frac{1}{x-c} \right) = 0 \Rightarrow 0 = 0 \ .$$

Portanto, a constante continua indeterminada e não conseguimos obter uma solução particular.

Problemas em que é dada uma equação diferencial e condições de contorno suficientes para a determinação de uma solução particular são chamados *problemas de valores de contorno*. A maioria dos problemas de aplicação de equações diferenciais são deste tipo.

Em problemas que envolvem funções dependentes do tempo, quando uma condição de contorno envolve um instante inicial zero, ela é chamada *condição inicial*. Um exemplo disto é a determinação da trajetória de uma partícula descrita por uma equação diferencial quando se conhece a posição desta no instante $t = 0$, sendo esta uma condição inicial.

Nos capítulos que seguem iniciaremos o nosso estudo sobre técnicas de resolução de equações diferenciais. Isto será feito indo dos casos mais simples para os mais complexos.