2 - Equações diferenciais ordinárias lineares de primeira ordem homogêneas com coeficientes constantes

Neste capítulo iniciaremos nossos estudos de métodos para a resolução de equações diferenciais. Começaremos pelo tipo mais simples. Em primeiro lugar, somente consideraremos equações diferenciais ordinárias lineares. Neste curso, somente esse tipo mais simples de equações será estudado. Além disto, neste capítulo, estaremos considerando somente equações diferenciais de primeira ordem homogêneas, isto é, aquelas que envolvem somente uma função desconhecida e a sua derivada. Também estaremos vendo apenas o caso em que essas equações diferenciais têm coeficientes constantes. Quando sujeitas a todas essas limitações, essas equações ficam da forma

$$ay' + by = 0 \ .$$

Apesar de termos limitado bastante o tipo de equações que iremos estudar, existe um número bastante grande de aplicações, como veremos na seção 2.3 deste capítulo.

A seguir, estudaremos um métdo que resolve todas as equações diferenciais do tipo descrito acima.

2.1 - Método dos polinômios característicos

Como já foi visto no capítulo anterior, a solução de equações diferenciais de primeira ordem freqüentemente envolvem funções exponenciais. Vamos, agora, considerar que, dada uma equação diferencial do tipo

$$ay' + by = 0 \ ,$$

a sua solução é uma função do tipo

$$y = A\,e^{rx} \ ,$$

onde A e r são constantes. Para que a função acima seja uma solução da equação diferencial, ela terá que satisfazer a última quando substituirmos a função y. Para isto, precisamos da derivada da função y:

$$y' = rA\,e^{rx} \ .$$

Substituindo na equação diferencial, temos

$$ay' + by = 0 \Rightarrow arA\,e^{rx} + bA\,e^{rx} = 0 \Rightarrow A(ar + b)\,e^{rx} = 0 \ .$$

Sabemos que uma função exponencial nunca se anula. Portanto, a única forma da expressão acima se anular é quando

$$A(ar + b) = 0 \ .$$

Agora, temos duas opções: ou o coeficiente A é zero, o que implica $y = 0.e^{rx} = 0$, que é a solução nula, chamada *solução trivial*, ou temos

$$ar + b = 0 \ .$$

Como os coeficientes a e b são números conhecidos, podemos determinar r em termos deles:

$$ar + b = 0 \Rightarrow ar = -b \Rightarrow r = -\frac{b}{a}\ .$$

A solução fica, então,

$$y = A\, e^{-\frac{b}{a}x}\ ,$$

onde A permanece indeterminada e é precisamente o coeficiente arbitrário que se espera da solução geral de uma equação diferencial de primeira ordem.

A equação $ar+b=0$ é chamada *equação característica* da equação diferencial $ay'+by=0$. Resolvendo esta equação, é possível encontrar a solução geral da equação diferencial. Isto ilustra o método chamado *método dos polinômios característicos*, que pode ser aplicado na resolução de equações diferenciais de diversas ordens (isto será visto nos capítulos seguintes). Este método será usado agora na resolução de algumas equações diferenciais de primeira ordem.

Ex.1: encontre a solução geral da equação diferencial $y' - 2y = 0$.

Solução: usando o método dos polinômios característicos, podemos escrever a equação característica

$$r - 2 = 0 \Rightarrow r = 2\ .$$

Portanto, a solução geral fica $$y = A\, e^{2x}\ ,\ A \in I\!R.$$

Ex.2: encontre a solução geral da equação diferencial $2y' + 4y = 0$.

Solução: a equação característica fica

$$2r + 4 = 0 \Rightarrow 2r = -4 \Rightarrow r = -2\ .$$

Portanto, a solução geral fica $$y = A\, e^{-2x}\ ,\ A \in I\!R.$$

Ex.3: encontre a solução geral da equação diferencial $3y' - 5y = 0$.

Solução: a equação característica fica

$$3r - 5 = 0 \Rightarrow 3r = 5 \Rightarrow r = \frac{5}{3}\ .$$

Portanto, a solução geral fica $$y = A\, e^{\frac{5}{3}x}\ ,\ A \in I\!R.$$

Como pudemos ver, a utilização desse método é bastante simples e reduz o problema da determinação de uma equação diferencial de primeira ordem ao da determinação de uma equação de primeiro grau. Veremos a seguir alguns exemplos de equações diferenciais desse tipo associadas a condições de contorno.

2.2 - Problemas de valores de contorno

Quando uma equação diferencial do tipo estudado neste capítulo vem junto com uma condição de contorno conveniente, podemos determinar uma solução particular que satisfaça essa condição a partir da solução geral, obtida através do método explicado na seção anterior.

Ex.1: encontre a solução da equação diferencial $2y' - y = 0$ sujeita à condição de contorno $y(0) = 2$.

Solução: a equação característica fica

$$2r - 1 = 0 \Rightarrow 2r = 1 \Rightarrow r = \frac{1}{2}\ .$$

Portanto, a solução geral fica $$y = A\, e^{\frac{1}{2}x}\ ,\ A \in I\!R.$$

Aplicando a condição de contorno, temos

$$y(0) = 2 \Rightarrow A\, e^{\frac{1}{2}.0} = 2 \Rightarrow A\, e^{0} = 2 \Rightarrow A.1 = 2 \Rightarrow A = 2 \ .$$

Portanto, a solução fica $$y = 2\, e^{\frac{1}{2}x} \ .$$

Ex.2: encontre a solução da equação diferencial $2y' + 3y = 0$ sujeita à condição de contorno $y(0) = 4$.

Solução: a equação característica fica

$$2r + 3 = 0 \Rightarrow 2r = -3 \Rightarrow r = -\frac{3}{2} \ .$$

Portanto, a solução geral fica $$y = A\, e^{-\frac{3}{2}x} \ , \ A \in I\!R.$$

Aplicando a condição de contorno, temos

$$y(0) = 4 \Rightarrow A\, e^{-\frac{3}{2}.0} = 4 \Rightarrow A\, e^{0} = 4 \Rightarrow A.1 = 4 \Rightarrow A = 4 \ .$$

Portanto, a solução fica $$y = 4\, e^{-\frac{3}{2}x} \ .$$

Ex.3: encontre a solução da equação diferencial $y' - 4y = 0$ sujeita à condição de contorno $y(1) = 3$.

Solução: a equação característica fica

$$r - 4 = 0 \Rightarrow r = 4 \ .$$

Portanto, a solução geral fica $$y = A\, e^{4x} \ , \ A \in I\!R.$$

Aplicando a condição de contorno, temos

$$y(1) = 3 \Rightarrow A\, e^{4.1} = 3 \Rightarrow A\, e^{4} = 3 \Rightarrow A = \frac{3}{e^4} \Rightarrow A = 3\, e^{-4} \ .$$

Portanto, a solução fica $$y = 3\, e^{-4}\, e^{4x} = 3\, e^{-4+4x} \ .$$

2.3 - Aplicações

O tipo de equações diferenciais de primeira ordem que estamos estudando neste capítulo é um tanto restrito, mas tem diversas aplicações em áreas tão distintas quanto a física nuclear e finanças. Veremos agora alguns exemplos dessas aplicações.

a) Dinâmica populacional.

Consideremos uma população de algum ser vivo capaz de se reproduzir: uma população de coelhos, de peixes ou mesmo de bactérias. Se não houver qualquer limitação para o seu crescimento, isto é, falta de comida, predadores, doenças ou outros fatores externos, essa população tenderá a aumentar. Esse aumento será maior se a população também for maior. Com base nessas hipótese, podemos criar um modelo que exprima como essa população irá crescer com o tempo. Considerando $P(t)$ uma função que exprime a população com relação tempo t, podemos deduzir a seguinte equação diferencial:

$$\frac{dP}{dt} = kP \ ,$$

que indica que a variação da população com relação ao tempo é diretamente proprocional à população já existente. A constante k depende de fatores como o nível de fertilidade da população a ser estudada. É comum representarmos a derivada com relação ao tempo de uma função como um ponto acima dela, isto é, $\frac{dP}{dt} = \dot{P}$.

Utilizando esta notação, a equação diferencial fica

$$\dot{P} = kP \ .$$

Esta equação diferencial pode ser resolvida utilizando o método dos polinômios característicos. A equação característica relativa a essa equação diferencial é

$$r = k \ .$$

Portanto, a solução da equação diferencial é dada por

$$P(t) = A\, e^{kt} \ ,$$

onde A é uma constante que pode ser determinada mediante condições de contorno adequadas. Este problema já foi visto no capítulo 1, mas aqui apresentamos o método de como resolver a equação diferencial. A seguir, veremos alguns exemplos que utilizam esta fórmula.

Ex.1: em um laboratório, os cientistas estudam uma colônia de bactérias que foi colocada em um recipiente cheio de nutrientes. Considerando-se que essas bactérias se repoduzem a uma taxa $k = 6$ bactérias por dia e que a população inicial era de 2.000 bactérias, calcule o número de elementos desta população após 1 dia, 2 dias e uma semana.

Solução: neste caso, podemos usar o modelo de crescimento populacional dado pela equação diferencial

$$\frac{dP}{dt} = kP \Rightarrow \frac{dP}{dt} = 6P \Rightarrow \dot{P} = 6P \ .$$

A equação característica é

$$r = 6 \ ,$$

de modo que temos a solução geral

$$P(t) = A\, e^{6t} \ , \ A \in \mathbb{R}.$$

Utilizamos agora a condição de contorno segundo a qual a população inicial de bactérias é de 2.000, isto é, $P(0) = 2.000$:

$$P(0) = 2.000 \Rightarrow A\, e^{6.0} = 2.000 \Rightarrow A.1 = 2.000 \Rightarrow A = 2.000 \ .$$

Portanto, a função que descreve a população de bactérias como função do tempo é

$$P(t) = 2.000\, e^{6t} \ .$$

Após 1 dia, teremos

$$P(1) = 2.000\, e^{6.1} = 2.000\, e^{6} = 806.857.$$

Portanto, após 1 dia teremos 806.857 bactérias (note que o resultado foi arredondado para um número inteiro, pois não existe meia bactéria viva). Após dois dias teremos

$$P(2) = 2.000\, e^{6.2} = 2.000\, e^{12} = 32.550.958.$$

Portanto, após dois dias teremos 32.550.958 bactérias. Após uma semana, que é igual a sete dias, teremos

$$P(7) = 2.000\, e^{6.7} = 2.000\, e^{42} \approx 3,48.10^{21} \ ,$$

isto é, $3,48.10^{21}$ bactérias! Isto é o resultado do crescimento exponencial dessa população.

Ex.2: um pecuarista tem 360 cabeças de gado. Em 5 anos, considerando a procriação natural do rebanho e a ausência de abate de animais, essa população passa a ser de 2.104 cabeças de gado. Qual é a taxa de crescimento anual do rebanho?

Solução: em primeira aproximação, podemos considerar que o crescimento populacional é diretamente proporcional ao número total de elementos da população. Esse modelo é descrito pela equação diferencial

$$\frac{dP}{dt} = kP \Rightarrow \dot{P} = kP,$$

que tem como solução geral

$$P(t) = A\,e^{kt}\ ,\ A \in I\!R.$$

Para determinarmos a constante A, podemos usar a condição de contorno segundo a qual a população original era de 360 vacas e bois:

$$P(0) = 360 \Rightarrow A\,e^{k.0} = 360 \Rightarrow A\,e^0 = 360 \Rightarrow A.1 = 360 \Rightarrow A = 360\ .$$

Portanto, a solução da equação diferencial fica

$$P(t) = 360\,e^{kt}\ .$$

Para determinarmos o valor da constante k, que é a taxa de crescimento populacional por ano, usamos o fato da população ter aumentado para 2.104 cabeças após 5 anos, ou seja,

$$P(5) = 2.104 \Rightarrow 360\,e^{k.5} = 2.104 \Rightarrow 360\,e^{5k} = 2.104 \Rightarrow\ e^{5k} = \frac{2.104}{360}\ .$$

Aplicando o logaritmo natural dos dois lados da equação acima, temos

$$\ln\,e^{5k} = \ln\frac{2.104}{360} \Rightarrow 5k = \ln\frac{2.104}{360} \Rightarrow k = \frac{1}{5}\ln\frac{1.204}{360} \approx 0,2415\ .$$

Portanto, a taxa de crescimento populacional do rebanho foi de $0,2415$ por ano.

b) Decaimento radioativo.

Como aprendemos em Química e em Física, as partículas constituintes dos elementos da natureza são os átomos, formados por um núcleo circundado por elétrons. O núcleo atômico é composto por prótons e nêutrons, que se aglomeram em um espaço muito pequeno do átomo. O número de prótons de um núcleo determina a naureza do material que dele é feito. Por exemplo, um átomo com um só próton é o átomo de hidrogênio. Um átomo com dois prótons é o átomo de hélio e um átomo com 8 prótons é o átomo de oxigênio.

A massa de um átomo é dada aproximadamente pela soma dos prótons e nêutrons do núcleo. No caso de átomos não muito massivos, o número de prótons e nêutrons no núcleo é o mesmo, mas em átomos mais massivos o número de nêutrons tende a ser maior que o número de prótons. Alguns desses átomos mais massivos têm um núcleo instável, o que significa que eles têm uma tendência a expelir parte do núcleo para conseguir uma configuração mais estável. Quando isto acontece, prótons e nêutrons são expelidos a altas velocidades. Como o núcleo perde prótons, o átomo muda de elemento. As partículas expelidas do núcleo formam um dos tipo de radiação, e podem causar danos a seres humanos devido às altas velocidades com que são expelidas, pois podem colidir com o núcleo de uma célula e alterar o seu DNA de modo a torná-la uma célula cancerosa. Os materiais que têm núcleos instáveis são chamados *materiais radioativos*.

De acordo com a Mecânica Quântica, o núcleo de um átomo radioativo tem uma probabilidade de emitir uma partícula em um determinado intervalo de tempo. O evento poderá ocorrer ou não, dependendo dessa probabilidade. Quando um átomo radioativo emite uma parte de seu núcleo, diz-se que ele *decai*. Devido a esse decaimento probabilístico, se tivermos uma grande quantidade de átomos, alguns deles decairão e outros não. O efeito disto é que, ao invés de todos os átomos de uma determinada amostra decairem simultaneamente, ocorrerá um decaimento gradativo dependente da probabilidade de decaimento de um átomo individual. Então, em uma determinada amostra de material radioativo, teremos cada vez menos material radioativo e cada vez mais material decaído. Quanto mais material radioativo estiver presente na amostra, maior será o número de núcleo que decaem. Com base nisto, podemos montar a equação diferencial

$$\frac{dm}{dt} = -km\ ,$$

onde m é a massa de material radioativo, t é o tempo e k é uma constante que indica a taxa de decaimento de um determinado elemento. A equação característica desta equação diferencial é

$$r = -k\ ,$$

de modo que a solução da equação diferencial é dada por

$$m(t) = A\,e^{-kt}\ ,$$

onde A é uma constante que pode ser determinada mediante condições de contorno adequadas. A solução mostra que o decaimento cai exponencialmente. Por isso, um material radioativo emitirá muita radiação no início e baixas doses de radiação após um certo período de tempo.

Ex.1: o rádio 226 é um material radioativo que decai a uma taxa de $0,0004279$ ano^{-1}. Dada uma quantidade de 50 mg de rádio, calcule a massa não decaída do elemento após um 500 anos.

Solução: a velocidade do decaimento depende da quantidade do produto. Com base nisto, podemos montar a seguinte equação diferencial:

$$\frac{dm}{dt} = -km\ ,$$

onde $m = m(t)$ é a quantidade (em mg) do material não decaído, t é o tempo e k é a taxa de decaimento por ano. Temos, então, $k = 0,0004279$ ano^{-1} e a condição de contorno segundo a qual a massa inicial era de 50 mg, isto é, $Q(0) = 50\ mg$.

Vamos, agora, resolver a equação diferencial, que podemos escrever como

$$\dot{m} = -km\ .$$

A equação característica fica

$$r = -k\ ,$$

de modo que a solução geral é dada por

$$m(t) = A\,e^{-kt}\ .$$

Substituindo k, temos

$$m(t) = A\,e^{-0,0004279t}\ .$$

Aplicando a condição de contorno, temos

$$m(0) = 50 \Rightarrow A\,e^{-0,0004279.0} = 50 \Rightarrow A\,e^{0} = 50 \Rightarrow A = 50\ .$$

Portanto, a equação que determina a massa não decaída fica

$$m(t) = 50\,e^{-0,0004279t}\ .$$

Usando essa equação para $t = 500$ anos, temos

$$m(500) = 50\,e^{-0,0004279.500} = 50\,e^{-0,21395} \approx 40,37\ .$$

Portanto, após 500 anos restarão $40,37$ mg de material radioativo.

A *meia-vida* de um material radioativo é definida como sendo o tempo que metade da amostra desse material leva para decair. Este tempo pode ser calculado da seguinte forma. Dada a equação para o decaimento radioativo de um certo material,

$$m(t) = A\,e^{-kt}\ ,$$

podemos aplicar a condição de contorno de que a quantidade inicial de material radioativo da amostra é m_0, de modo que

$$m(0) = m_0 \Rightarrow A\,e^{-k.0} = m_0 \Rightarrow A.1 = m_0 \Rightarrow A = m_0\ .$$

Portanto, a equação fica

$$m(t) = m_0\,e^{-kt}\ .$$

Se τ é o tempo necessário para que metade de uma amostra decaia, isto é, τ é a meia-vida de um certo elemento, temos que

$$m(\tau) = \frac{1}{2}m_0 \Rightarrow m_0\,e^{-k\tau} = \frac{1}{2}m_0 \Rightarrow\ e^{-k\tau} = \frac{1}{2}\ .$$

Aplicando o logaritmo natural em ambos os lados da equação acima, temos

$$\ln e^{-k\tau} = \ln \frac{1}{2} \Rightarrow -k\tau = \ln 1 - \ln 2 \Rightarrow -k\tau = 0 - \ln 2 \Rightarrow k\tau = \ln 2 \Rightarrow \tau = \frac{1}{k} \ln 2 \ .$$

Portanto, a meia-vida de um certo elemento pode ser calculada se soubermos a taxa com que ele decai.

Ex.2: calcule a mei-vida do rádio 226 sabendo que sua taxa de decaimento é $0,0004279$ ano^{-1}.

Solução: podemos calcular a meia-vida usando a fórmula deduzida anteriormente:

$$\tau = \frac{1}{k} \ln 2 = \frac{1}{0,0004279} \ln 2 \approx 1.619,88 \ .$$

Portanto, a meia-vida do rádio 226 é de aproximadamente 1.620 anos.

c) Juros compostos.

Vamos supor que uma pessoa faz uma aplicação de seu dinheiro, seja em poupança ou em fundos de ações, ou outra aplicação qualquer. Ao final de cert tempo, essa pessoa espera receber o seu dinheiro com juros, isto é, o investimento inicial mais um certo valor de dinheiro.

A fórmula usada para o cálculo do saldo s de um valor inicial s_0 de dinheiro aplicado a uma taxa de juros anual k, onde os juros são concedidos um número n de vezes por ano (de mês em mês isto seria $n = 12$ vezes) é

$$s(t) = s_0 \left(1 + \frac{k}{n}\right)^{nt} \ .$$

Por exemplo, se alguém aplica 1.000 reais na poupança a uma taxa $k = 0,07$ ao ano, onde os juros são calculados mês a mês ($n = 12$), ao final de 3 anos terá um saldo dado por

$$s(3) = 1.000 \left(1 + \frac{0,07}{12}\right)^{12.3} \approx 1.233 \ .$$

Portanto, ao final de três anos, a pessoa terá 1.233 reais.

Se quisermos fazer o cálculo de quanto um investimento renderá se os cálculos dos juros forem feitos de forma contínua, isto é, qando n é infinito, podemos montar a seguinte equação diferencial baseando-se na idéia de que quanto maior for o valor investido, maior será o valor a ser acrescido devido aos juros. Podemos assumir que o valor a ser acrescido também depende da taxa k de juros, de forma que temos a equação diferencial

$$\frac{ds}{dt} = ks \ ,$$

cuja equação característica é

$$r = k \ ,$$

de modo que a solução geral fica

$$s(t) = A\, e^{kt} \ ,$$

onde A é uma constante arbitrária. Se considerarmos a sma inicial como send s_0, temos

$$s(0) = s_0 \Rightarrow A\, e^{k.0} = s_0 \Rightarrow A\, e^0 = s_0 \Rightarrow A.1 = s_0 \Rightarrow A = s_0 \ ,$$

de modo que a solução fica

$$s(t) = s_0\, e^{kt} \ .$$

A seguir, faremos duas aplicações desta fórmula.

Ex.1: uma empresa investe 5.000 reais em um fundo de ações com taxa de rentabilidade anual $k = 0,15$ ao ano calculada continuamente. Após 3 anos, qual será o valor que a empresa possui neste fundo?

Solução: temos que

$$s(t) = s_0\, e^{kt} \ ,$$

onde neste caso $s_0 = 5.000$ e $k = 0,15$ ao ano. Temos, então,

$$s(t) = 5.000\, e^{0,15t} \ .$$

Após três anos, temos

$$s(3) = 5.000\, e^{0,15.3} = 5.000\, e^{0,45} \approx 7.842 \ .$$

Portanto, ao final de 3 anos a empresa terá 7.842 naquele fundo de investimentos.

Ex.2: uma pessoa pega emprestado 300 reais por meio do seu cheque especial a uma taxa de 12% ao mês. Quanto essa pessoa estará devendo ao banco após 4 meses por causa desse empréstimo se os juros forem computados continuamente?

Solução: temos que

$$s(t) = s_0\, e^{kt} \ ,$$

onde $s_0 = 300$ e $k = 0,12$ ao mês. Temos, então,

$$s(t) = 300\, e^{0,12t} \ .$$

Após quatro meses, teremos

$$s(4) = 300\, e^{0,12.4} = 300\, e^{0,48} \approx 484,82 \ .$$

Portanto, ao final de 4 meses a pessoa estará devendo ao banco 484 reais e 82 centavos.