Lista de Exercícios de CDI B
Capítulo 2: Revisão de integrais

Primitivas

Exemplo 1: verifique se $F(x) = \frac{x^3}{3} + 4$ é primitiva de $f(x) = x^2$.

Solução: $F'(x) = \frac{3x^2}{3} + 0 = x^2$. Portanto, $F(x)$ é primitiva de $f(x) = x^2$.

E1) Verifique se:

a) $F(x) = \frac{x^2}{2}$ é primitiva de $f(x) = x$, b) $F(x) = \frac{x^2}{2} + 2$ é primitiva de $f(x) = x$,
c) $F(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}$ é primitiva de $f(x) = x$, d) $F(x) = \frac{x^2}{2} + x$ é primitiva de $f(x) = x$,
e) $F(x) = \frac{1}{x} + 2$ é primitiva de $f(x) = \frac{1}{x^2}$, f) $F(x) = -\frac{1}{x} + 3$ é primitiva de $f(x) = \frac{1}{x^2}$,
g) $F(x) = 2\sqrt{x} - 4$ é primitiva de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Integrais imediatas

Exemplo 2: calcule a integral de $f(x) = x^3$.

Solução: $\int f(x)dx = \int x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + c = \frac{x^4}{4} + c.$

E2) Calcule as integrais das seguintes funções:

a) $f(x) = x$, b) $f(x) = x^2$, c) $f(x) = x^5$, d) $f(x) = 1$, e) $f(x) = x^{19}$.

Exemplo 3: calcule a integral de $f(x)\frac{1}{x^3}$.

Solução: $\int f(x)dx = \int \frac{1}{x^3}dx = \int x^{-3}dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + c = \frac{x^{-2}}{-2} + c = -\frac{x^{-2}}{2} + c = -\frac{1}{2x^2} + c.$

E3) Calcule as integrais das seguintes funções:

a) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, b) $f(x) = \frac{1}{x^4}$, c) $f(x) = \frac{1}{x^5}$, d) $f(x) = \frac{1}{x^6}$.

Exemplo 4: calcule a integral de $f(x) = \sqrt[3]{x^4}$.

Solução: $\int f(x)dx = \int \sqrt[3]{x^4}dx = \int x^{4/3}dx = \frac{x^{4/3+1}}{4/3+1} + c = \frac{x^{7/3}}{7/3} + c = \frac{1}{7/3}x^{7/3} + c = \frac{3}{7}x^{7/3} + c = \frac{3}{7}\sqrt[3]{x^7} + c.$

E4) Calcule as integrais das seguintes funções:

a) $f(x) = \sqrt{x}$, b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, c) $f(x) = \sqrt{x^3}$, d) $f(x) = \sqrt[4]{x^3}$, e) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, f) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$,
g) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}$.

Exemplo 5: calcule a integral da função $f(x) = 3^x$.

Solução: $\int f(x)dx = \int 3^x dx = \frac{3^x}{\ln 3} + c.$

E5) Calcule as integrais das seguintes funções:

a) $f(x) = 2^x$, b) $f(x) = 3^x$, c) $f(x) = 10^x$, d) $f(x) = e^x$, e) $f(x) = \frac{1}{x}$.

Exemplo 6: calcule a integral da função $f(x) = \operatorname{sen} x$.

Solução: $\int f(x)dx = \int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + c.$

E6) Calcule as integrais das seguintes funções:

a) $f(x) = \cos x$, b) $f(x) = \text{senh}\, x$, c) $f(x) = \cosh x$.

Integrais de combinações lineares de funções

Exemplo 7: calcule a integral da função $f(x) = 3x - \frac{2}{x^2}$.

Solução: primeiro, vamos preparar a função de modo que ela fique mais fácil de ser integrada:

$$f(x) = 3x - \frac{2}{x^2} = 3x - 2\frac{1}{x} = x - 2x^{-2}.$$

Agora, integramos a função:

$$\int f(x)dx = \int (3x - 2x^{-2}) = 3\frac{x^2}{2} - 2\frac{x^{-1}}{-1} + c = \frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{x} + c.$$

E7) Calcule as integrais das seguintes funções:

a) $f(x) = x^2 + x$, b) $f(x) = 3x^2$, c) $f(x) = 2x + 1$, d) $f(x) = x + x^3$, e) $f(x) = 2x^2 - \sqrt{x}$, f) $f(x) = \frac{2}{x^2}$, g) $f(x) = -\frac{4}{x^3}$, h) $f(x) = 3 - \frac{2}{x^2}$, i) $f(x) = 3x^\pi - 2x$, j) $f(x) = x^{\sqrt{3}} - \frac{3}{\sqrt{x}}$, k) $f(x) = 3\cos x - e^x$, l) $f(x) = 2^x - \frac{3}{x}$, m) $f(x) = 2x^3 + 3\cosh x - 3^x$.

Integrais de produtos de funções: método da integração por partes

Exemplo 8: calcule a integral da função $f(x) = x\,\text{sen}\, x$.

Solução: temos a seguinte integral:

$$\int f(x)dx = \int x\,\text{sen}\, x\, dx\ .$$

Este é um caso que pode ser resolvido através do método da integração por partes, baseado na fórmula:

$$\int u(x)\frac{dv(x)}{dx}dx = u(x)v(x) - \int v(x)\frac{du(x)}{dx}dx + c', \quad \text{ou} \quad \int u\ dv = uv - \int v\ du + c'\ ,$$

onde c' é uma constante arbitrária. Na integral acima, tomamos

$$\begin{cases} u = x\ , \\ dv = \text{sen}\, x\ dx\ . \end{cases}$$

Desta forma, temos $\quad u = x \Rightarrow du = 1.dx \Rightarrow du = dx \quad , \quad dv = \text{sen}\, x\ dx \Rightarrow v = -\cos x\ .$

Com isto, podemos substituir os valores encontrados na fórmula:

$$\begin{aligned} \int x\,\text{sen}\, x\ dx &= x(-\cos x) - \int (-\cos x)dx + c' = -x\cos x + \int \cos x\ dx + c' = -x\cos x + \text{sen}\, x + c'' + c' = \\ &= -x\cos x + \text{sen}\, x + c\ . \end{aligned}$$

E8) Calcule as integrais das seguintes funções:

a) $f(x) = x\cos x$, b) $f(x) = x\,e^x$, c) $f(x) = x\,\text{senh}\, x$, d) $f(x) = \ln x$, e) $f(x) = \log_2 x$.

Exemplo 9: calcule a integral da função $f(x) = x^2\cos x$.

Solução: temos a seguinte integral:

$$\int f(x)dx = \int x^2\cos x\, dx\ .$$

Usando o método da integração por partes, escolhemos

$$\begin{cases} u = x^2 \ , \\ dv = \cos x \ dx \ . \end{cases}$$

Desta forma, temos

$$u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx \quad , \quad dv = \cos x \ dx \Rightarrow v = \operatorname{sen} x \ .$$

Substituindo os valores encontrados na fórmula, temos:

$$\int x^2 \cos x \ dx = x^2 \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x . 2x \ dx + c' = x^2 \operatorname{sen} x - 2 \int x \operatorname{sen} x \ dx + c' \ .$$

A nova integral que apareceu no lado direito da equação acima também tem que ser integrada, usando o método da integração por partes. Como isto já foi feito no exemplo 4, vamos utilizar o resultado lá obtidoe substitui-lo no lugar da integral (tomando o cuidado de não dar o mesmo símbolo a duas constantes distintas):

$$\begin{aligned} \int x^2 \cos \ dx &= x^2 \operatorname{sen} x - 2\left(-x\cos x + \operatorname{sen} x + c''\right) + c' = x^2 \operatorname{sen} x + 2x\cos x - 2\operatorname{sen} x - 2c'' + c' = \\ &= x^2 \operatorname{sen} x + 2x \cos x - 2 \operatorname{sen} x + c \ . \end{aligned}$$

E9) Calcule as integrais das seguintes funções:

a) $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x$, b) $f(x) = x^2 e^x$, c) $f(x) = x^3 \cos x$.

Exemplo 10: calcule a integral da função $f(x) = \operatorname{sen} x \, e^x$.

Solução: temos a integral

$$\int f(x)dx = \int \operatorname{sen} x \, e^x dx \ .$$

Usando o método da integração por partes, escolhemos

$$\begin{cases} u = \operatorname{sen} x \ , \\ dv = e^x \ dx \ . \end{cases}$$

Desta forma, temos $\quad u = \operatorname{sen} x \Rightarrow du = \cos x dx \quad , \quad dv = e^x \ dx \Rightarrow v = e^x \ .$

Substituindo os valores encontrados na fórmula, temos:

$$\int \operatorname{sen} x \, e^x \ dx = \cos x \, e^x - \int e^x \cos x \ dx + c' = \cos x \, e^x - \int \cos x \, e^x \ dx + c' \ .$$

A nova integral que apareceu no lado direito da equação acima também tem que ser integrada, usando o método da integração por partes. Escolhemos

$$\begin{cases} u = \cos x \ , \\ dv = e^x \ dx \ , \end{cases}$$

de modo que $\quad u = \cos x \Rightarrow du = -\operatorname{sen} x dx \quad , \quad dv = e^x \ dx \Rightarrow v = e^x \ .$

Substituindo os valores encontrados na fórmula, temos:

$$\int \cos x \, e^x \ dx = -\operatorname{sen} x \, e^x - \int e^x(-\operatorname{sen} x) \ dx + c'' = -\operatorname{sen} x \, e^x + \int \operatorname{sen} x \, e^x \ dx + c'' \ .$$

Substituindo este resultado na integral obtida da primeira integração por partes, obtemos

$$\int \operatorname{sen} x \, e^x \ dx = \cos x \, e^x - \left(-\operatorname{sen} x \, e^x + \int \operatorname{sen} x \, e^x \ dx + c''\right) + c' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \operatorname{sen} x \, e^x \ dx = \cos x \, e^x + \operatorname{sen} x \, e^x - \int \operatorname{sen} x \, e^x \ dx - c'' + c' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \operatorname{sen} x \, e^x \ dx + \int \operatorname{sen} x \, e^x \ dx = \cos x \, e^x + \operatorname{sen} x \, e^x - c'' + c' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\int \operatorname{sen} x \, e^x \ dx = \cos x \, e^x + \operatorname{sen} x \, e^x - c'' + c' \Rightarrow \int \operatorname{sen} x \, e^x \ dx = \frac{1}{2}\left(\cos x \, e^x + \operatorname{sen} x \, e^x\right) + \frac{1}{2}(-c'' + c') \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \operatorname{sen} x \, e^x \, dx = \frac{1}{2} (\cos x + \operatorname{sen} x) \, e^x + c \, .$$

E10) Calcule as integrais das seguintes funções:

a) $f(x) = \cos x \, e^x$, b) $f(x) = \operatorname{sen} x \cos x$, c) $f(x) = x \ln x$, d) $f(x) = x \log_2 x$.

Integrais de funções compostas: método da mudança de variável

Exemplo 11: calcule a integral da função $f(x) = \operatorname{sen}(2x)$.

Solução: temos a integral

$$\int f(x)dx = \int \operatorname{sen}(2x) \, dx \, .$$

Este é um caso que pode ser resolvido através da mudança de variáveis:

$$g = 2x \Rightarrow dg = 2dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2} dg.$$

Substituindo $2x$ por g e dx por $\frac{1}{2}dg$, a integral fica

$$\int \operatorname{sen}(2x) \, dx = \int \operatorname{sen} g \cdot \frac{1}{2} \, dg = \frac{1}{2} \int \operatorname{sen} g \, dg = \frac{1}{2}(-\cos g) + c = -\frac{1}{2} \cos g + c = -\frac{1}{2} \cos(2x) + c.$$

E11) Calcule as integrais das seguintes funções:

a) $f(x) = \cos(4x)$, b) $f(x) = e^{-2x}$, c) $f(x) = \frac{1}{x-2}$, d) $f(x) = \sqrt{2x+4}$, e) $f(x) = \sqrt[3]{2x-1}$.

Exemplo 12: calcule a integral da função $f(x) = x \operatorname{sen} x^2$.

Solução: temos a integral

$$\int f(x)dx = \int x \operatorname{sen} x^2 \, dx \, .$$

Podemos escrever a integral acima da seguinte forma:

$$\int \operatorname{sen} x^2 \cdot x \, dx.$$

Agora, efetuamos a seguinte mudança de variáveis:

$$g = x^2 \Rightarrow dg = 2x \, dx \Rightarrow 2x \, dx = dg \Rightarrow x \, dx = \frac{1}{2} dg.$$

Substituindo x^2 por g e xdx por $\frac{1}{2}dg$, a integral fica

$$\int \operatorname{sen} x^2 \cdot x \, dx = \int \operatorname{sen} g \cdot \frac{1}{2} \, dg = \frac{1}{2} \int \operatorname{sen} g \, dg = \frac{1}{2}(-\cos g) + c = -\frac{1}{2} \cos g + c = -\frac{1}{2} \cos x^2 + c.$$

E12) Calcule as integrais das seguintes funções:

a) $f(x) = x \cos x^2$, b) $f(x) = x \, e^{x^2}$, c) $f(x) = \frac{x}{x^2+2}$, d) $f(x) = 3x\sqrt{3x^2-2}$.

Exemplo 13: calcule a integral da função $f(x) = \frac{1}{x} \operatorname{sen} \ln x$.

Solução: temos a integral

$$\int f(x)dx = \int \frac{1}{x} \operatorname{sen} \ln x \, dx \, .$$

Podemos escrever esta integral da seguinte forma:

$$\int \operatorname{sen} \ln x \cdot \frac{1}{x}\, dx.$$

Agora, efetuamos a seguinte mudança de variáveis:

$$g = \ln x \Rightarrow dg = \frac{1}{x}dx \Rightarrow \frac{1}{x}dx = dg.$$

Substituindo $\ln x$ por g e $\frac{1}{x}dx$ por dg, a integral fica

$$\int \operatorname{sen} \ln x \cdot \frac{1}{x}\, dx = \int \operatorname{sen} g\, dg = -\cos g + c = -\cos \ln x + c.$$

E13) Calcule as integrais das seguintes funções:

a) $f(x) = e^x \cos e^x$, b) $f(x) = \cos x\, e^{\operatorname{sen} x}$, c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \cos \sqrt{x}$, d) $f(x) = \operatorname{tg} x$, e) $f(x) = \frac{3x^2-2}{x^3-2x+4}$.

Integrais de potências de funções trigonométricas e hiperbólicas

Exemplo 14: calcule a integral da função $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$.

Solução: temos a integral

$$\int f(x)dx = \int \operatorname{sen}^2 x\, dx\ .$$

Da fórmula do cosseno da soma de dois ângulos, temos

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} \operatorname{sen} b\ ,$$

de modo que

$$\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos x \cos x - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x = \cos^2 x - \cos(2x)\ .$$

Usando a relação trigonométrica fundamental, temos

$$\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x\ .$$

Substituindo na expressão obtida anteriormente, temos

$$\operatorname{sen}^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x - \cos(2x) \Rightarrow 2\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos(2x) \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}\left[1 - \cos(2x)\right]\ .$$

Substituindo esta expressão na integral, temos

$$\begin{aligned} \int f(x)dx &= \int \frac{1}{2}\left[1-\cos(2x)\right]\, dx = \frac{1}{2}\int \left[1-\cos(2x)\right]\, dx = \frac{1}{2}\int 1\, dx - \frac{1}{2}\int \cos(2x)\, dx = \\ &= \frac{1}{2}x + c' - \frac{1}{2}\int \cos(2x)\, dx\ . \end{aligned}$$

A segunda integral pode ser resolvida por meio da mudança de variável

$$g = 2x \Rightarrow dg = 2dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2}dg.$$

Substituindo $2x$ por g e dx por $\frac{1}{2}dg$, a segunda integral fica

$$\int \cos(2x)\ dx = \int \cos g \cdot \frac{1}{2}\ dg = \frac{1}{2}\int \cos g\ dg = \frac{1}{2}\operatorname{sen} g + c'' = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x) + c''.$$

Substituindo o resultado agora obtido, temos

$$\int f(x)dx = \frac{1}{2}x + c' - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x) + c''\right] = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) + c\ .$$

E14) Calcule as integrais das seguintes funções:

a) $f(x) = \cos^2 x$, b) $f(x) = \operatorname{senh}^2 x$, c) $\cosh^2 x$.

Exemplo 15: calcule a integral da função $f(x) = \operatorname{sen}^3 x$.

Solução: temos a integral

$$\int f(x)dx = \int \operatorname{sen}^3 x\, dx = \int \operatorname{sen} x . \operatorname{sen}^2 x\, dx\ .$$

Da relação trigonométrica fundamental, temos

$$\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x\ .$$

Substituindo na integral, temos

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \int \operatorname{sen} x(1-\cos^2 x)\, dx = \int \left(\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x\cos^2 x\right)\, dx = \int \operatorname{sen} x\, dx - \int \operatorname{sen} x \cos^2 x\, dx = \\ &= = -\cos x + c' - \int \operatorname{sen} x\cos^2 x\, dx\ .\end{aligned}$$

A segunda integral pode ser resolvida por meio da mudança de variável

$$g = \cos x \Rightarrow dg = -\operatorname{sen} x\, dx \Rightarrow \operatorname{sen} x\, dx = -dg.$$

Substituindo $\cos x$ por g e $\operatorname{sen} x\, dx$ por $-dg$, a segunda integral fica

$$\int \operatorname{sen} x\cos^2 x\ dx = \int g^2(-dg) = -\int g^2\, dg = -\frac{g^3}{3} + c'' = -\frac{1}{3}\cos^3 x + c''.$$

Substituindo o resultado agora obtido, temos

$$\int f(x)dx = -\cos x + c' - \frac{1}{3}\cos^3 x + c'' = -\cos x - \frac{1}{3}\cos^3 x + c\ .$$

E15) Calcule as derivadas das seguintes funções:

a) $f(x) = \cos^3 x$, b) $f(x) = \operatorname{sen}^5 x$.

Exemplo 16: calcule a integral da função $f(x) = \operatorname{sen}^4 x$.

Solução: temos a integral

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \int \operatorname{sen}^4 x\, dx = \int \left(\operatorname{sen}^2 x\right)^2\, dx = \int \left\{\frac{1}{2}[1-\cos(2x)]\right\}^2\, dx = \int \frac{1}{4}\left[1 - 2\cos(2x) + \cos^2(2x)\right]\, dx = \\ &= \frac{1}{4}\int \left\{1 - 2\cos(2x) + \frac{1}{2}[1+\cos(4x)]\right\}\, dx = \frac{1}{4}\int \left[1 - 2\cos(2x) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(4x)\right]\, dx = \\ &= \frac{1}{4}\int \left[\frac{3}{2} - 2\cos(2x) + \frac{1}{2}\cos(4x)\right]\, dx = \frac{3}{8}\int 1\, dx - \frac{1}{2}\int \cos(2x)\, dx + \frac{1}{8}\int \cos(4x)\, dx = \\ &= \frac{3}{8}x + c' - \frac{1}{2}\int \cos(2x)\, dx + \frac{1}{8}\int \cos(4x)\, dx\ .\end{aligned}$$

A segunda e a terceira integrais podem ser resolvidas por meio do método da mudança de variável. O que obtemos é

$$\int \cos(2x)\, dx = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x) + c''\quad ,\quad \int \cos(4x)\, dx = \frac{1}{4}\operatorname{sen}(4x) + c'''\ .$$

Substituindo esses dois resultados na integral original obtemos, então,

$$\int f(x)dx = \frac{3}{8}x + c' - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x) + c''\right] + \frac{1}{8}\left[\frac{1}{4}\operatorname{sen}(4x) + c'''\right] = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{32}\operatorname{sen}(4x) + c\ .$$

E16) Calcule as integrais das seguintes funções:

a) $f(x) = \cos^4 x$, b) $f(x) = \operatorname{sen}^6 x$.

Integrais de razões de funções: método das frações parciais

Exemplo 17: calcule a integral da função $f(x) = \frac{1}{x^2-2x-8}$.

Solução: temos a integral

$$\int f(x)dx = \int \frac{1}{x^2 - 2x - 8}\, dx\ .$$

Primeiro, temos que calcular as raízes da função do denominador: $f(x) = x^2 - 2x - 8$. Ficamos, então, com a equação $x^2 - 2x - 8 = 0$. Utilizando a fórmula de Bháskara, temos

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4.1.(-8) = 4 + 32 = 36.$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{36}}{2.1} = \frac{2 \pm 6}{2} = \begin{cases} \frac{2-6}{2} = -\frac{4}{2} = -2, \\ \frac{2+6}{2} = \frac{8}{2} = 4. \end{cases}$$

Portanto, a solução é dada por $S = \{-2, 4\}$.
Podemos usar estas raízes para escrever $x^2 - 2x - 8 = (x+2)(x-4)$, de modo que temos

$$\frac{1}{x^2 - 2x - 8} = \frac{1}{(x+2)(x-4)}.$$

Agora, queremos encontrar constantes A e B tais que

$$\frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-4} = \frac{1}{(x+2)(x-4)}.$$

Tirando o mínimo múltiplo comum do lado direito da equação acima, ficamos com

$$\frac{A(x-4) + B(x+2)}{(x+2)(x-4)} = \frac{1}{(x+2)(x-4)} \Rightarrow A(x-4) + B(x+2) = 1 \Rightarrow Ax - 4A + Bx + 2B = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (A+B)x - 4A + 2B = 1.$$

Para que isto seja verdade, devemos ter

$$\begin{cases} A + b = 0 \Rightarrow A = -B, \\ -4A + 2B = 1. \end{cases}$$

Substituindo o resultado da primeira equação na segunda, temos

$$-4A + 2B = 1 \Rightarrow -4(-B) + 2B = 1 \Rightarrow 4B + 2B = 1 \Rightarrow 6B = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{6}.$$

Substituindo isto na primeira equação, obtemos $A = -B \Rightarrow A = -\frac{1}{6}$.
Agora que encontramos os valores de A e B, temos que

$$\frac{1}{(x+2)(x-4)} = \frac{-1/6}{x+2} + \frac{1/6}{x-4}.$$

Substituindo na integral, temos

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \int \frac{1}{x^2-2x-8}\,dx = \int \left(\frac{-1/6}{x+2}+\frac{1/6}{x-4}\right)dx = \int \frac{-1/6}{x+2}\,dx + \int \frac{1/6}{x-4}\,dx = \\ &= -\frac{1}{6}\int \frac{1}{x+2}\,dx + \frac{1}{6}\int \frac{1}{x-4}\,dx = -\frac{1}{6}\ln|x+2| + \frac{1}{6}\ln|x-4| + c\ .\end{aligned}$$

E17) Calcule as integrais das seguintes funções:

a) $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$, b) $f(x) = \frac{1}{x^2-3x+2}$, c) $f(x) = \frac{2}{x^2-2x-3}$, d) $f(x) = \frac{x-1}{x^2-3x+2}$.

Integração por substituição trigonométrica

Exemplo 18: calcule a integral da função $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Solução: temos a integral

$$\int f(x)dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\ .$$

Primeiro, devemos notar que a função $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ só é definida para $1-x^2>0$, o que implica no seguinte:

$$1-x^2>0 \Rightarrow -x^2>-1 \Rightarrow x^2<1 \Rightarrow -1<x<1.$$

Dentro do intervalo $-1<x<1$, temos que $-1<\cos\theta<1$, o que implica que θ está sempre dentro de um dos seguintes intervalos: $0<\theta<\pi$, $\pi<\theta<2\pi$, $2\pi<\theta<3\pi$, $\ldots$, ou $-\pi<\theta<0$, $-2\pi<\theta<-\pi$, $-3\pi<\theta<-2\pi$, etc, sendo que podemos escolher qualquer um desses intervalos para fazer a mudança de variável de x para θ. Escolhemos o intervalo $0<\theta<\pi$. Dentro desse intervalo de valores, podemos efetuar a seguinte mudança de variável:

$$x = \cos\theta \Rightarrow dx = -\,\mathrm{sen}\,\theta\ d\theta.$$

Substituindo x por $\cos\theta$ e dx por $-\,\mathrm{sen}\,\theta\ d\theta$, a integral fica

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}(-\,\mathrm{sen}\,\theta)\ d\theta = -\int \frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}\ d\theta.$$

Utilizando a identidade trigonométrica $\cos^2 x + \mathrm{sen}^2 x = 1$, temos que $\mathrm{sen}^2 x = 1-\cos^2 x$. Substituindo na integral, temos

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\int \frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\sqrt{\mathrm{sen}^2\theta}}\ d\theta = -\int \frac{\mathrm{sen}\,\theta}{|\,\mathrm{sen}\,\theta|}\ d\theta.$$

Dentro do intervalo que escolhemos, $0<\theta<\pi$, temos que $\mathrm{sen}\,\theta>0$, de modo que a integral fica

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\int \frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\mathrm{sen}\,\theta}\ d\theta = -\int 1\ d\theta = -\theta + c.$$

Agora, precisamos voltar à variável original (x). Dentro do intervalo considerado acima, temos

$$x = \cos\theta \Rightarrow \theta = \arccos x.$$

Substituindo no resultado da integral, temos

$$\int f(x)dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\arccos x + c.$$

E18) Calcule as integrais das seguintes funções:

a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, usando a substituição $x = \sin\theta$; b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; c) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Respostas

E1) a) é primitiva, b) é primitiva, c) é primitiva, d) não é primitiva, e) não é primitiva, f) é primitiva, g) é primitiva.

E2) a) $\int f(x)dx = \frac{x^2}{2} + c$, b) $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} + c$, c) $\int f(x)dx = \frac{x^6}{6} + c$, d) $\int f(x)dx = x + c$, e) $\int f(x)dx = \frac{x^{20}}{20} + c$.

E3) a) $\int f(x)dx = -x^{-1} + c = -\frac{1}{x} + c$, b) $\int f(x)dx = -\frac{1}{3}x^{-3} + c = -\frac{1}{3x^3} + c$, c) $\int f(x)dx = -\frac{1}{4}x^{-4} + c = -\frac{1}{4x^4} + c$, d) $\int f(x)dx = -\frac{1}{5}x^{-5} + c = -\frac{1}{5x^5} + c$.

E4) a) $\int f(x)dx = \frac{2}{3}x^{3/2} + c = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$, b) $\int f(x)dx = \frac{3}{4}x^{4/3} + c = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + c$, c) $\int f(x)dx = \frac{2}{5}x^{5/2} + c = \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + c$, d) $\int f(x)dx = \frac{4}{7}x^{7/4} + c = \frac{4}{7}\sqrt[4]{x^7} + c$, e) $\int f(x)dx = 2\sqrt{x} + c$, f) $\int f(x)dx = \frac{4}{3}x^{3/4} + c = \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} + c$, g) $\int f(x)dx = -\frac{3}{2}x^{-2/3} + c = -\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + c$.

E5) a) $\int f(x)dx = \frac{2^x}{\ln 2} + c$, b) $\int f(x)dx = \frac{3^x}{\ln 3} + c$, c) $\int f(x)dx = \frac{10^x}{\ln 10} + c$, d) $\int f(x)dx = e^x + c$, e) $\int f(x)dx = \ln|x| + c$.

E6) a) $\int f(x)dx = \operatorname{sen} x + c$, b) $\int f(x)dx = \cosh x + c$, c) $\int f(x)dx = \operatorname{senh} x + c$.

E7) a) $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + c$, b) $\int f(x)dx = x^3 + c$, c) $\int f(x)dx = x^2 + x + c$, d) $\int f(x)dx = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + c$, e) $\int f(x)dx = \frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^{3/2} + c = \frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{3}x\sqrt{x}$, f) $\int f(x)dx = -\frac{2}{x} + c$, g) $\int f(x)dx = \frac{2}{x^2} + c$, h) $\int f(x)dx = 3 + \frac{2}{x} + c$, i) $\int f(x)dx = \frac{3}{\pi+1}x^{\pi+1} - x^2 + c$, j) $\int f(x)dx = \frac{x^{\sqrt{3}+1}}{\sqrt{3}+1} - 6\sqrt{x} + c$, k) $\int f(x)dx = 3\operatorname{sen} x - e^x + c$, l) $\int f(x)dx = \frac{2^x}{\ln 2} - 3\ln|x| + c$, m) $\int f(x)dx = \frac{x^4}{2} + 3\operatorname{senh} x - \frac{3^x}{\ln 3} + c$.

E8) a) $\int f(x)dx = x\operatorname{sen} x + \cos x + c$, b) $\int f(x)dx = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + c$, c) $\int f(x)dx = x\cosh x - \operatorname{senh} x + c$, d) $\int f(x)dx = x\ln x - x + c$, e) $\int f(x)dx = x\log_2 x - x\log_2 e + c$.

E9) a) $\int f(x)dx = -x^2\cos x + 2x\operatorname{sen} x + 2\cos x + c$, b) $\int f(x)dx = x^2 e^x - 2x\,e^x + 2\,e^x + c$, c) $\int f(x)dx = x^3\operatorname{sen} x + 3x^2\cos x - 6x\operatorname{sen} x - 6\cos x + c$.

E10) a) $\int f(x)dx = \frac{1}{2}(\cos x + \operatorname{sen} x)\,e^x + c$, b) $\int f(x)dx = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x + c$, c) $\int f(x)dx = \frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right) + c$, d) $\int f(x)dx = \frac{x^2}{2}\left(\log_2 x - \frac{1}{2}\log_2 e\right) + c$.

E11) a) $\int f(x)dx = \frac{1}{4}\operatorname{sen}(4x) + c$, b) $\int f(x)dx = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x} + c$, c) $\int f(x)dx = \ln|x-2| + c$, d) $\int f(x)dx = \frac{1}{3}(2x+4)^{3/2} + c$, e) $\int f(x)dx = \frac{3}{8}(2x-1)^{4/3} + c$.

E12) a) $\int f(x)dx = \frac{1}{2}\operatorname{sen} x^2 + c$, b) $\int f(x)dx = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2} + c$, c) $\int f(x)dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+2| + c$, d) $\int f(x)dx = \frac{1}{3}(3x^2-2)^{3/2} + c$.

E13) a) $\int f(x)dx = \operatorname{sen}\mathrm{e}^x + c$, b) $\int f(x)dx = \mathrm{e}^{\operatorname{sen} x} + c$, c) $\int f(x)dx = 2\operatorname{sen}\sqrt{x} + c$, d) $\int f(x)dx = -\ln|\cos x| + c$, e) $\int f(x)dx = \ln|3x^2 - 2x + 4| + c$.

E14) a) $\int f(x)dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) + c$, b) $\int f(x)dx = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\operatorname{senh}(2x) + c$, c) $\int f(x)dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\operatorname{senh}(2x) + c$.

E15) a) $\int f(x)dx = \operatorname{sen} x - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + c$, b) $\int f(x)dx = -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + c$.

E16) a) $\int f(x)dx = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{32}\operatorname{sen}(4x) + c$, b) $\int f(x)dx = \frac{7}{32}x - \frac{13}{64}\operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{48}\operatorname{sen}^3(x) + c$.

E17) a) $\int f(x)dx = -\frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|x-1| + c$, b) $\int f(x)dx = -\ln|x-1| + \ln|x-2| + c$, c) $\int f(x)dx = -\frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|x-3| + c$, d) $\int f(x)dx = \ln|x-2| + c$.

E18) a) $\int f(x)dx = \operatorname{arcsen} x + c$, b) $\int f(x)dx = \operatorname{arcsenh} x + c$, c) $\int f(x)dx = \operatorname{arctg} x + c$.