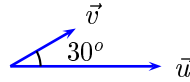


## Lista de Exercícios de CVE

### Capítulo 5: Produtos entre vetores

#### Produto escalar.

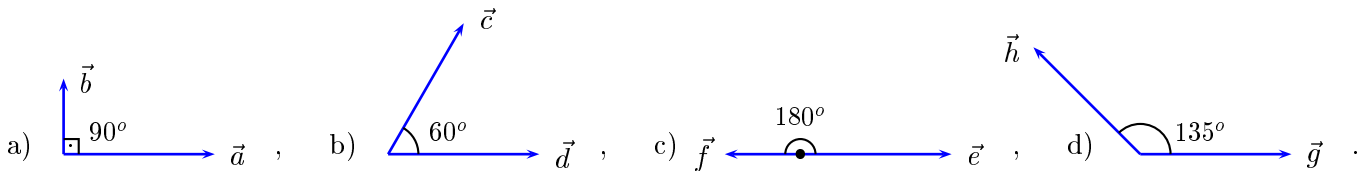
**Exemplo 1:** calcule o produto escalar  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  entre os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  abaixo.



*Solução:* sabemos que  $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \theta$ , onde  $\theta$  é o ângulo entre os dois vetores. Temos, então,

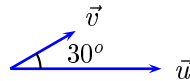
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \theta = 2 \cdot 1 \cdot \cos 30^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

**E1)** Calcule os produtos escalares entre os vetores abaixo (dados:  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = 1$ ,  $|\vec{c}| = 2$ ,  $|\vec{d}| = 2$ ,  $|\vec{e}| = 2$ ,  $|\vec{f}| = 1$ ,  $|\vec{g}| = 2$ ,  $|\vec{h}| = 2$ ):



#### Produto vetorial.

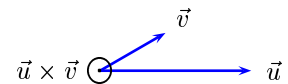
**Exemplo 2:** calcule o produto vetorial  $\vec{u} \times \vec{v}$  entre os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  abaixo.



*Solução:*

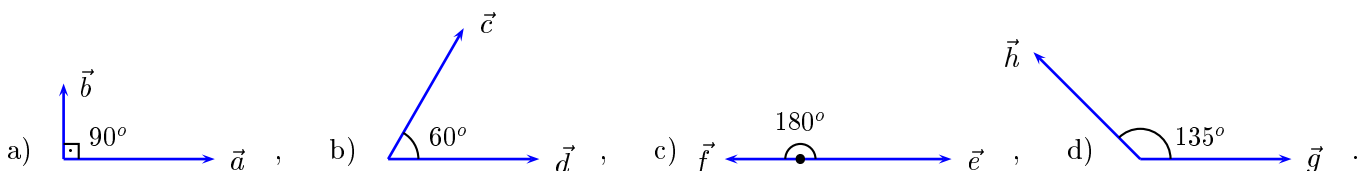
sabemos que  $\vec{u} \times \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \sin \theta \hat{n}$ , onde  $\theta$  é o ângulo entre os dois vetores e  $\hat{n}$  é um versor que é ortogonal a estes e cuja direção é dada pela regra da mão direita. Temos, então,

$$\vec{u} \times \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \sin \theta \hat{n} = 2 \cdot 1 \cdot \sin 30^\circ \hat{n} = 2 \cdot \frac{1}{2} \hat{n} = 1 \hat{n}.$$



A direção e o sentido do vetor resultante são indicados na figura ao lado.

**E2)** Calcule os produtos vetoriais entre os vetores abaixo (dados:  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = 1$ ,  $|\vec{c}| = 2$ ,  $|\vec{d}| = 2$ ,  $|\vec{e}| = 2$ ,  $|\vec{f}| = 1$ ,  $|\vec{g}| = 2$ ,  $|\vec{h}| = 2$ ):



#### Produto escalar em termos de componentes.

**Exemplo 3:** dados os vetores  $\vec{u} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$  e  $\vec{v} = -\hat{i} + 2\hat{j}$ , calcule  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ .

*Solução:*  $\vec{u} \cdot \vec{v} = (3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}) \cdot (-\hat{i} + 2\hat{j}) = 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 = -3 + 4 + 0 = 1$ .

**E3)** Dados os vetores  $\vec{a} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ ,  $\vec{b} = -2\hat{i} + \hat{j}$  e  $\vec{c} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ , calcule:

- a)  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ , b)  $\vec{b} \cdot \vec{a}$ , c)  $\vec{a} \cdot \vec{c}$ , d)  $\vec{b} \cdot \vec{c}$ , e)  $\hat{a} \cdot \hat{a}$ , f)  $\hat{i} \cdot \hat{i}$ , g)  $\hat{i} \cdot \hat{j}$ .

### Produto vetorial em termos de componentes.

**Exemplo 4:** dados os vetores  $\vec{u} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$  e  $\vec{v} = -\hat{i} + 2\hat{j}$ , calcule  $\vec{u} \times \vec{v}$ .

Solução:

$$\begin{aligned} \vec{u} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = [2.0\hat{i} + (-1).(-1)\hat{j} + 3.2\hat{k}] - [(-1).2\hat{i} + 3.0\hat{j} + 2.(-1)\hat{k}] = \\ &= (0\hat{i} + \hat{j} + 6\hat{k}) - (-2\hat{i} + 0\hat{j} - 2\hat{k}) = (0 + 2)\hat{i} + (1 - 0)\hat{j} + (6 + 2)\hat{k} = 2\hat{i} + \hat{j} + 8\hat{k}. \end{aligned}$$

**E4)** Dados os vetores  $\vec{a} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ ,  $\vec{b} = -2\hat{i} + \hat{j}$  e  $\vec{c} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ , calcule:

- a)  $\vec{a} \times \vec{b}$ , b)  $\vec{b} \times \vec{a}$ , c)  $\vec{a} \times \vec{c}$ , d)  $\vec{b} \times \vec{c}$ , e)  $\hat{a} \times \hat{a}$ , f)  $\hat{i} \times \hat{i}$ , g)  $\hat{i} \times \hat{j}$ .

### Produto misto.

**Exemplo 5:** dados os vetores  $\vec{u} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ ,  $\vec{v} = -\hat{i} + 2\hat{j}$  e  $\vec{w} = 2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ , calcule  $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ .

Solução:

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) &= \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = [3.2.3 + 2.0.2 + (-1).(-1).(-1)] - [3.0.(-1) + 2.(-1).3 + (-1).2.2] = \\ &= (18 + 0 - 1) - (0 - 6 - 4) = 17 - (-10) = 17 + 10 = 27. \end{aligned}$$

**E5)** Dados os vetores  $\vec{a} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ ,  $\vec{b} = -2\hat{i} + \hat{j}$  e  $\vec{c} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ , calcule:

- a)  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ , b)  $\vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})$ , c)  $\vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{b})$ .

### Respostas

**E1)** a) 0, b) 2, c) -2, d)  $-2\sqrt{2}$ .

**E2)** a)  $2\hat{n} \odot$ , b)  $2\sqrt{3}\hat{n} \otimes$ , c)  $\vec{0}$ , d)  $2\sqrt{2}\hat{n} \odot$ .

**E3)** a) -8, b) -8, c) 0, d) -1, e) 14, f) 1, g) 0.

**E4)** a)  $-\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$ , b)  $\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ , c)  $\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}$ , d)  $-\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}$ , e)  $\vec{0}$ , f)  $\vec{0}$ , g)  $\vec{k}$ .

**E5)** a) -2, b) -2, c) 2.