1 - Curvas no plano: equações algébricas

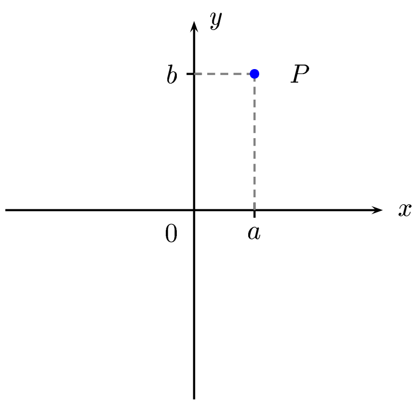
Vamos, neste capítulo, aprender como representar diversos tipos de curvas em um plano (superfície de duas dimensões) usando equações algébricas. Em duas dimensões, equações algébricas são relações entre duas variáveis, x e y. Lembremos que relações são mais gerais que funções e podem representar um número maior de curvas. Iniciaremos nosso estudo com retas e depois iremos introduzindo gradativamente algumas outras curvas de complexidade maior.

Durante o nosso estudo, é bom lembrarmos que curvas geométricas são independentes de um sistema de coordenadas. No entanto, quando parametrizamos essas curvas, torna-se mais fácil operar com elas. O conjunto de técnicas usadas para entender figuras geométricas em termos de equações pertence ao domínio da Geometria Analítica.

1.1 - Plano cartesiano

Quando queremos representar figuras em um plano, podemos adotar um sistema de coordenadas. Qualquer sistema de coordenadas em um plano pode ser descrito por duas coordenadas. Os sistemas mais usados para representar um plano são o *sistema cartesiano* e o *sistema de coordenadas polares*. Aqui estaremos estudando o sistema cartesiano de cordenadas, composto por dois eixos que são cópias da reta dos números reais. Esses eixos são ortogonais um ao outro e cruzam-se nos pontos 0 das duas retas. Esse cruzamento é chamado de *origem* do sistema cartesiano de coordenadas. Ao eixo horizontal chamamos eixo x e ao eixo vertical chamamos eixo y.

Podemos representar um ponto P de coordenadas (a, b) em um *sistema cartesiano de coordenadas* associando ao elemento a um valor no eixo x e ao elemento b um valor no eixo y, como na figura ao lado. As coordenadas (a, b) também são chamadas *pares ordenados* (ver curso de Cálculo). A notação usada para designar um ponto P de coordenada horizontal a e coordenada vertical b é $P(a, b)$.

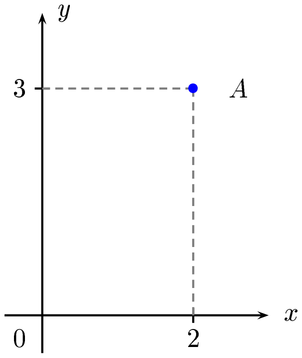


Obs.: o motivo de não escrevermos $P = (a, b)$ é porque essa notação já é usada para designar um vetor (ver curso de Cálculo Vetorial).

René Descartes *(1596-1650): grande matemático e filósofo francês. Quando jovem, alistou-se como soldado com o fim de adquirir uma melhor visão do mundo. Em 1637 publica sua obra* Discurso sobre o Método*, em que apresenta uma nova filosofia em que tudo é regido pela razão e por um método científico descrito por ele. Nesta mesma obra, escreveu um apêndice científico intitulado* Geometria*, onde traduz operações algébricas em linguagem geométrica. Também criou o sistema ortogonal de coordenadas, chamado depois de* cartesiano*, em sua homenagem.*

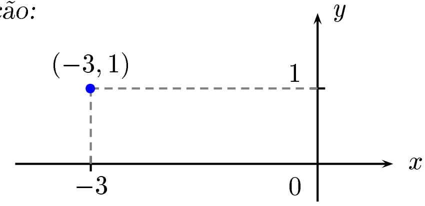
Ex.1: represente o ponto $A(2,3)$ no sistema cartesiano de coordenadas.

Solução:



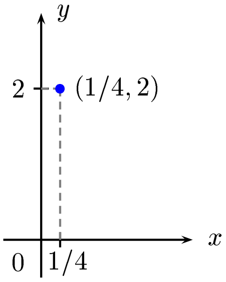
Ex.2: represente o ponto $B(-3,1)$ no sistema cartesiano de coordenadas.

Solução:



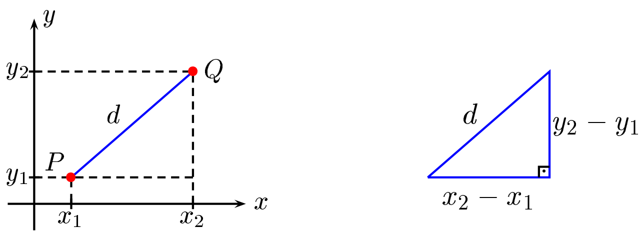
Ex.3: represente o ponto $C\left(\frac{1}{4}, 2\right)$ no sistema cartesiano de coordenadas.

Solução:



1.2 Distância entre dois pontos.

Se conhecermos as posições de dois pontos em um sistema cartesiano de coordenadas, podemos determinar a distância entre eles usando a trigonometria. Para isso, consideremos a figura abaixo, onde estamos representando um ponto P de coordenadas (x_1, y_1) e um ponto Q de coordenadas (x_2, y_2).



Vamos supor que $x_2 > x_1$ e $y_2 > y_1$, como na figura acima. Podemos desenhar um triângulo retângulo cuja base é dada por $x_2 - x_1$ e cuja altura é $y_2 - y_1$. A base e a altura correspondem aos catetos do triângulo retângulo. A distância d entre os dois pontos é a hipotenusa desse triângulo. Usando o Teorema de Pitágoras (ver curso de Cálculo Vetorial), temos

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \Rightarrow d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

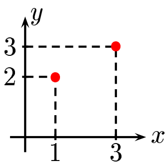
O mesmo raciocínio é válido para quando temos $x_2 < x_1$ ou $y_2 < y_1$, pois a fórmula envolve somente os quadrados das diferenças, que são sempre positivos (veremos isto nos exemplos a seguir). Portanto, temos a seguinte fórmula para a distância:

$$\boxed{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.}$$

Ex.1: represente os pontos $(1,2)$ e $(3,3)$ em um sistema cartesiano de coordenadas e calcule a distância entre eles.

Solução:
os pontos estão representados ao lado e a distância entre eles é dada por

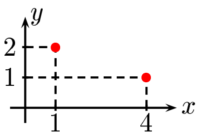
$$d = \sqrt{(3-1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{2^2 + 1^1} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}.$$



Ex.2: represente os pontos $(4,1)$ e $(1,2)$ em um sistema cartesiano de coordenadas e calcule a distância entre eles.

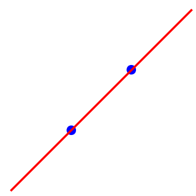
Solução:
os pontos estão representados ao lado e a distância entre eles é dada por

$$d = \sqrt{(1-4)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}.$$



1.3 - Retas

Dado um plano, uma *reta* é uma curva infinita que une dois pontos (figura ao lado). Retas são dadas por equações do tipo

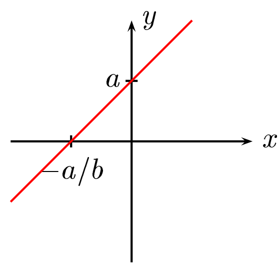


$$y = a + bx \ .$$

Outra forma de escrever esta relação é

$$y = y_0 + m(x - x_0) \ ,$$

onde m é chamado *coeficiente angular* da reta. As duas equações são equivalentes, pois



$$y = y_0 + m(x - x_0) = y_0 + mx - mx_0 = (y_0 - mx_0) + mx = a + bx \ ,$$

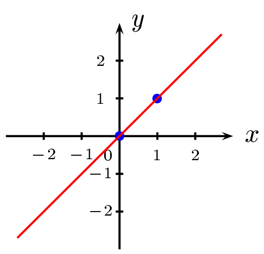
se fizermos $a = y_0 - mx_0$ e $b = m$. A segunda representação é mais útil se quisermos desenhar uma reta rapidamente.

A seguir, mostraremos alguns exemplos.

Ex.1: faça o gráfico da reta dada por $y = x$.

Solução: para plotar uma reta necessitamos somente de dois pontos. Para isto, escolhemos valores para a variável x e calculamos os valores correspondentes da variável y:

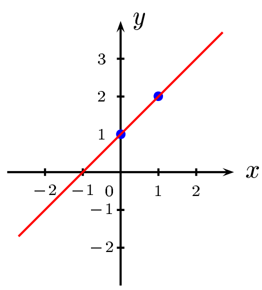
$$x = 0 \Rightarrow y = 0, \quad x = 1 \Rightarrow y = 1.$$



Ex.2: faça o gráfico da reta dada por $y = 1 + x$.

Solução:

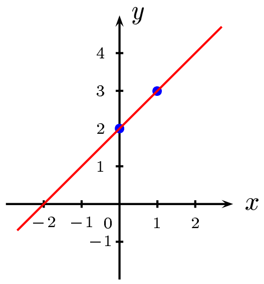
$$x = 0 \Rightarrow y = 1 + 0 = 1,$$
$$x = 1 \Rightarrow y = 1 + 1 = 2.$$



Ex.3: faça o gráfico da reta dada por $y = 2 + x$.

Solução:

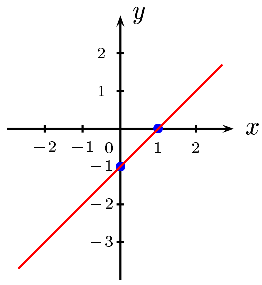
$$x = 0 \Rightarrow y = 2 + 0 = 2,$$
$$x = 1 \Rightarrow y = 2 + 1 = 3.$$



Ex.4: faça o gráfico da reta dada por $y = -1 + x$.

Solução:

$$x = 0 \Rightarrow y = -1 + 0 = -1,$$
$$x = 1 \Rightarrow y = -1 + 1 = 0.$$

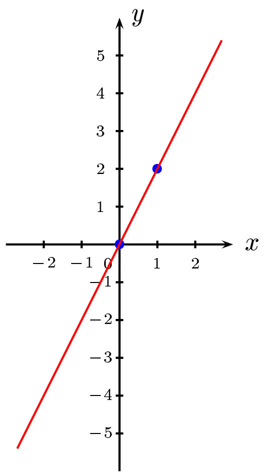


Note que o efeito de variar a constante y_0 é de transladar a reta para cima ou para baixo, dependendo do valor escolhido para a constante. Nos próximos exemplos, vamos estudar os efeitos de se mudar somente a constante m na equação da reta.

Ex.5: faça o gráfico da reta dada por $y = 2x$.

Solução:

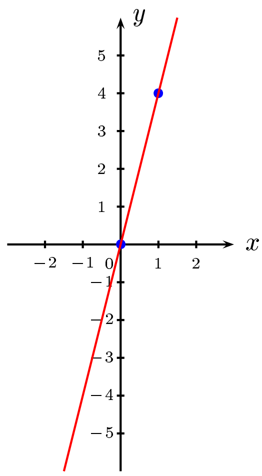
$$x = 0 \Rightarrow y = 2.0 = 0,$$
$$x = 1 \Rightarrow y = 2.1 = 2.$$



Ex.6: faça o gráfico da reta dada por $y = 4x$.

Solução:

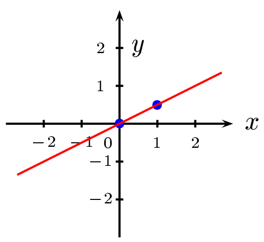
$$x = 0 \Rightarrow y = 4.0 = 0,$$
$$x = 1 \Rightarrow y = 4.1 = 4.$$



Ex.7: faça o gráfico da reta dada por $y = \frac{1}{2}x$.

Solução:

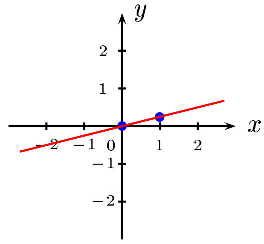
$$x = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}.0 = 0,$$
$$x = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}.1 = \frac{1}{2}.$$



Ex.8: faça o gráfico da reta dada por $y = \frac{1}{4}x$.

Solução:

$$x = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{4}.0 = 0,$$
$$x = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{4}.1 = \frac{1}{4}.$$

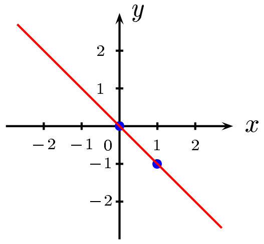


Portanto, variando o coeficiente angular da reta, estamos variando também o seu ângulo de inclinação com relação aos eixos coordenados. No curso de Cálculo, é visto que o coeficiente angular de uma reta corresponde à sua derivada. Caso o coeficiente angular seja negativo, temos retas decrescentes, como nos exemplos a seguir.

Ex.9: faça o gráfico da reta dada por $y = -x$.

Solução:

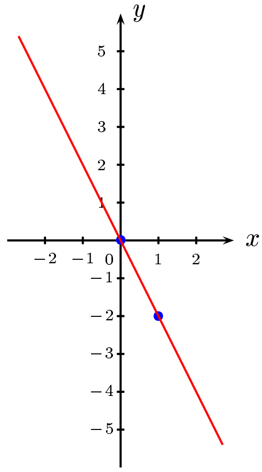
$$x = 0 \Rightarrow y = -0 = 0,$$
$$x = 1 \Rightarrow y = -1.$$



Ex.10: faça o gráfico da reta dada por $y = -2x$.

Solução:

$$x = 0 \Rightarrow y = -2.0 = 0,$$
$$x = 1 \Rightarrow y = -2.1 = -2.$$

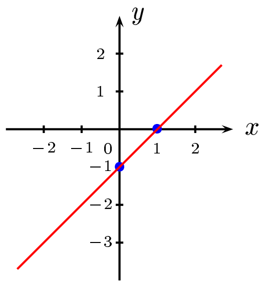


Vamos, agora, estudar os efeitos de mudarmos somente a constante x_0 da equação da reta.

Ex.11: faça o gráfico da reta dada por $y = x - 1$.

Solução: os efeitos são os mesmos que no exemplo 4, pois as duas equações são idênticas:

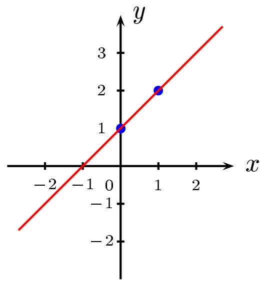
$$x = 0 \Rightarrow y = 0 - 1 = -1,$$
$$x = 1 \Rightarrow y = 1 - 1 = 0.$$



Ex.12: faça o gráfico da reta dada por $y = x - (-1) = x + 1$.

Solução: a equação é a mesma que a do exemplo 2:

$$x = 0 \Rightarrow y = 0 + 1 = 1,$$
$$x = 1 \Rightarrow y = 1 + 1 = 2.$$



O efeito de mudarmos a constante x_0 é o de deslocarmos a reta para a esquerda ou para a direita. Isto será melhor visualisado no caso das parábolas e outras curvas, que serão vistas a seguir.

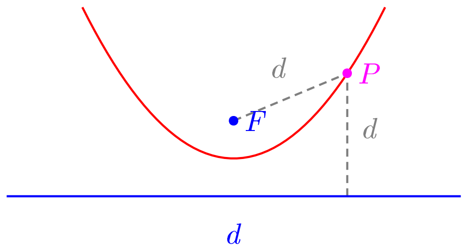
Vários exemplos podem ser dados de relações descritas por retas. Equações como o deslocamento s de um automóvel com relação ao tempo em um movimento retilíneo com velocidade v constante é dado pela equação $s(t) = s_0 + vt$, onde s_0 era a posição do automóvel no instante $t = 0$, que é a equação de uma reta. Outro é a relação entre o valor de um empréstimo E feito com juros j fixos em relação ao tempo, que é dada por $E(t) = E_0 + jt$, onde E_0 é o valor inicial empréstimo, que também é uma reta.

1.4 - Parábolas

Parábolas são curvas constituidas por todos os pontos cujas distâncias a uma reta d (chamada *diretriz*) e um ponto F (chamado *foco*) são iguais. Isto é mostrado na figura a seguir.

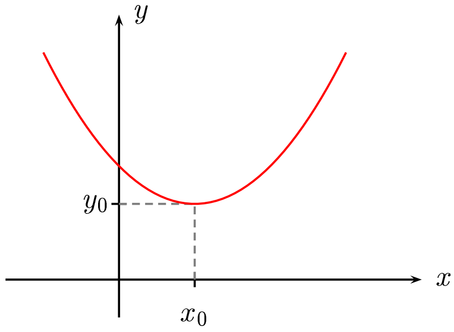
Parábolas são dadas por equações do tipo

$$y = ax + bx + cx^2 \ .$$



Outra forma de escrever esta relação é

$$y = y_0 + m(x - x_0)^2 \ .$$



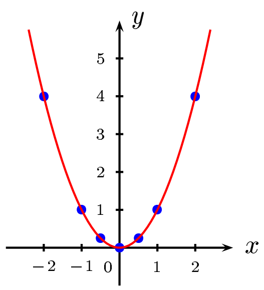
A equivalência entre as duas equações é mostrada abaixo:

$$\begin{aligned} y &= y_0 + m(x - x_0)^2 = y_0 + m(x^2 - 2x_0x + x_0^2) = \\ &= y_0 + mx^2 - 2mx_0x + mx_0^2 = \\ &= (y_0 + mx_0^2) + (-2)mx_0x + mx^2 \ . \end{aligned}$$

Se fizermos $a = y_0 + mx_0^2$, $b = -2mx_0$ e $c = m$, voltamos à primeira equação. Novamente, a segunda representação é mais útil geometricamente. Veremos alguns exemplos a seguir, começando por variar a constante y_0.

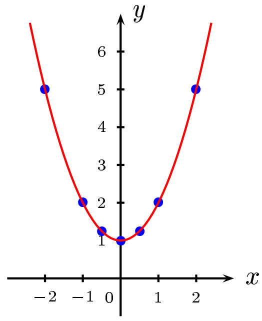
Ex.1: faça o gráfico da parábola dada por $y = x^2$.

Solução: para desenharmos uma parábola, é necessário calcular um número maior de pontos, que estão marcados no gráfico.



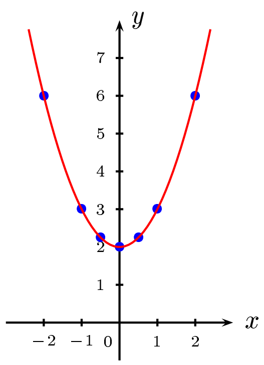
Ex.2: faça o gráfico da parábola dada por $y = 1 + x^2$.

Solução:



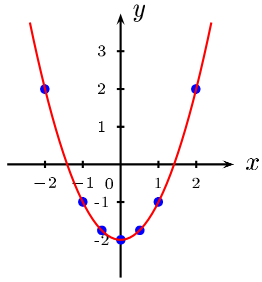
Ex.3: faça o gráfico da parábola dada por $y = 2 + x^2$.

Solução:



Ex.4: faça o gráfico da parábola dada por $y = -2 + x^2$.

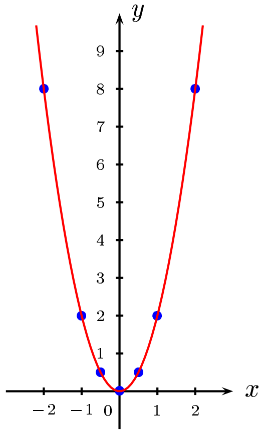
Solução:



Portanto, o efeito de modificarmos a constante y_0 é semelhante ao efeito obtido na equação da reta: a parábola é deslocada para cima ou para baixo. Agora, vamos modificar o fator m.

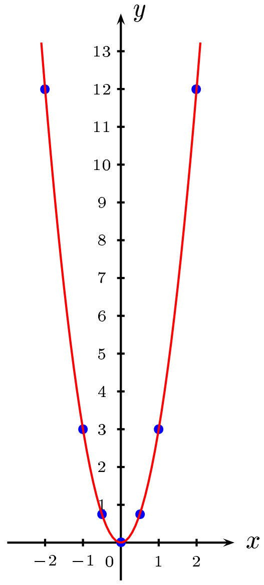
Ex.5: faça o gráfico da parábola dada por $y = 2x^2$.

Solução:



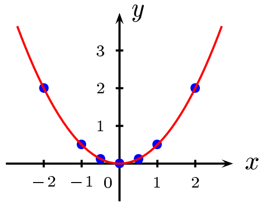
Ex.6: faça o gráfico da parábola dada por $y = 3x^2$.

Solução:



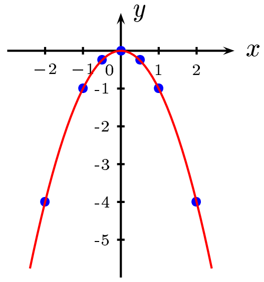
Ex.7: faça o gráfico da parábola dada por $y = \frac{1}{2}x^2$.

Solução:



Ex.8: faça o gráfico da parábola dada por $y = -x^2$.

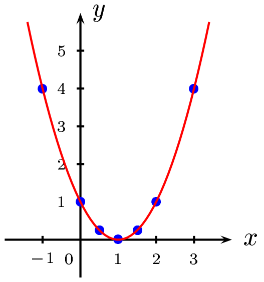
Solução:



Podemos observar que o efeito de modificar o coeficiente m é tornar a parábola mais fechada ou mais aberta, ou mesmo inverter a sua orientação. Vamos, agora, alterar a constante x_0 na equação da parábola.

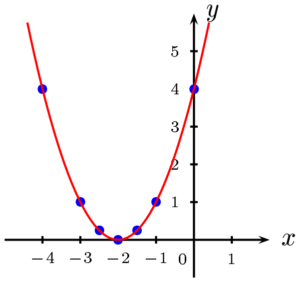
Ex.9: faça o gráfico da parábola dada por $y = (x-1)^2$.

Solução:



Ex.10: faça o gráfico da parábola dada por $y = (x+2)^2$.

Solução:



Portanto, modificando x_0 nós deslocamos a parábola para a esquerda ou para a direita. Outros efeitos podem ser conseguidos mediante mudanças simultâneas nos diversos coeficientes da equação da parábola, mas estes serão deixados para os exercícios.

Podemos, ainda, ter parábolas dadas por equações do tipo

$$x = a + by + y^2 \ ,$$

que têm uma representação equivalente:

$$x = x_0 + m(y - y_0)^2 \ .$$

Estas podem ser facilmente desenhadas invertendo-se os eixos x e y. Caso escolhamos desenvolvê-la isolando a variável y, temos

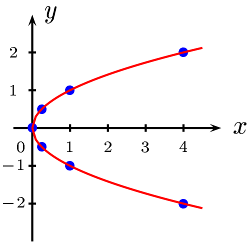
$$x = x_0 + m(y - y_0)^2 \Rightarrow x - x_0 = m(y - y_0)^2 \Rightarrow (y - y_0)^2 = \frac{1}{m}(x - x_0) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y - y_0 = \pm\sqrt{\frac{1}{m}(x - x_0)} \Rightarrow y = y_0 \pm \sqrt{\frac{1}{m}(x - x_0)} \ .$$

Como pode ser visto da equaç ao acima, parábolas assim escritas não são funções, pois um mesmo valor de x pode corresponder a dois valores distintos de y. Este é um exemplo de uma *relação*, que é mais geral que uma função.

A seguir, veremos alguns exemplos de paráblas com este tipo de equação.

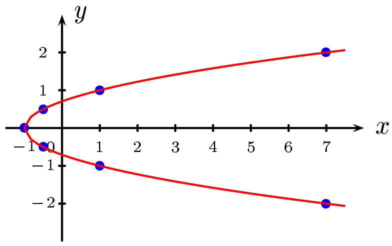
Ex.11: faça o gráfico da parábola dada por $x = y^2$.

Solução:



Ex.12: faça o gráfico da parábola dada por $x = -1 + 2y^2$.

Solução:

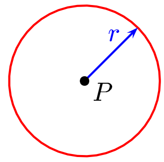


Muitos fenômenos são representados por parábolas. Um deles é a trajetória de um objeto que é lançado para cima e para frente. Esse tipo de curva também aparece se quisermos calcular a área A de um quadrado com relação ao seu lado, dado por l. A relação encontrada é $A = l^2$, que é uma meia parábola.

Além destas curvas, podemos ainda ter outras que são polinômios de graus mais elevados, como por exemplo $y = y_0 + (x - x_0)^3$ ou $y = y_0 + (x - x_0)^4$. No entanto, estes não apresentam tanto interesse do ponto de vista geométrico.

1.5 - Circunferências

Circunferências são regiões do plano que são e-quidistantes de um determinado ponto P. A essa distância de um ponto central é dado o nome de *raio* da circunferência. A equação de uma circunferência de raio r centrada em na origem (o ponto (0,0)) é dada por

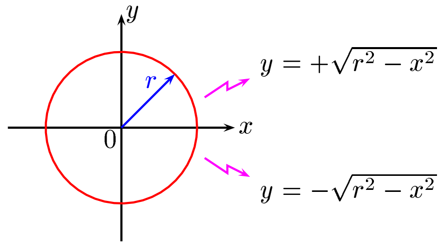


$$x^2 + y^2 = r^2 \ .$$

O gráfico pode ser feito isolando a variável y e atribuindo valores à variável x:

$$x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow y^2 = r^2 - x^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{r^2 - x^2} \ .$$

Note que a equação da circunferência não dá origem a uma função e sim uma relação, pois um mesmo valor de x pode estar associado a mais de um valor de y.



Obs.: Não devemos confundir circunferências com círculos. Circunferências são curvas e círculos são circunferências mais as regiões internas a elas.

Vamos verificar a equação da circunferência calculando um exemplo específico e plotando alguns pontos da circunferência obtida.

Ex.1: faça o gráfico da circunferência dada por $x^2 + y^2 = 4$.

Solução: vamos primeiro isolar a variável y:

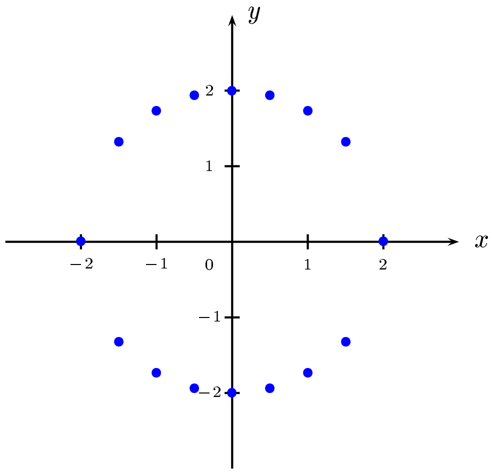
$$x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow y^2 = 4 - x^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{4 - x^2} \ .$$

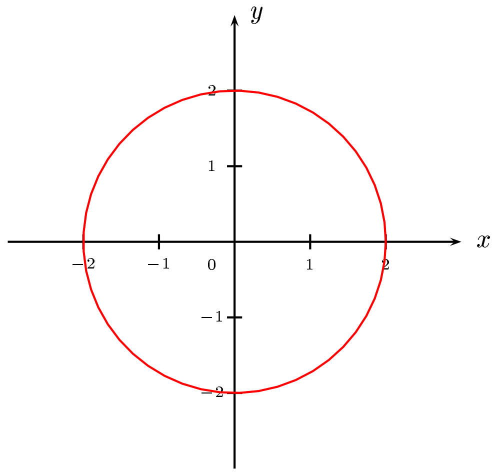
Agora, escolhemos alguns valores para x e calculamos seus respectivos valores em y. Na raiz, devemos ter

$$4 - x^2 \geq 0 \Rightarrow -x^2 \geq -4 \Rightarrow x^2 \leq 4 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2 \ .$$

Usamos esses resultados para calcular uma tabela com alguns pontos e, a partir disto, construimos a figura correspondente (abaixo).

x	$f(x)$
-2	0
$-1,5$	$\pm 1,322...$
-1	$\pm 1,732...$
$-0,5$	$\pm 1,936...$
0	± 2
$0,5$	$\pm 1,936...$
1	$\pm 1,732...$
$1,5$	$\pm 1,323...$
2	0

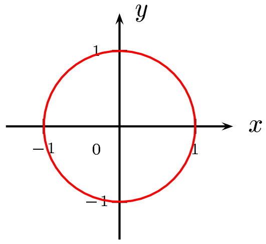




Vamos, agora, fazer o gráfico de algumas circunferências de forma mais direta.

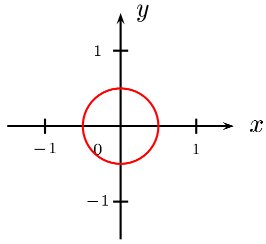
Ex.2: faça o gráfico da circunferência dada por $x^2 + y^2 = 1$.

Solução: esta é uma circunferência de raio 1 centrada em $(0, 0)$.



Ex.3: faça o gráfico da circunferência dada por $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$.

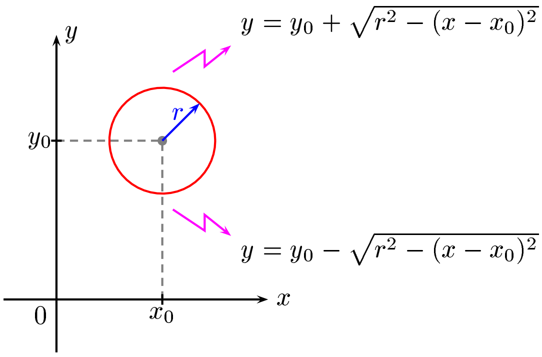
Solução: esta é uma circunferência de raio $r^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow r = \frac{1}{2}$ centrada em $(0, 0)$.



Uma generalização da equação já vista é a da uma circunferência que não está centrada na origem. A equação de uma circunferência de raio r centrada em um ponto (x_0, y_0) é dada por

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \ .$$

O raio da circunferência é medida a partir do ponto (x_0, y_0).



O gráfico pode ser feito isolando a variável y e atribuindo valores à variável x:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \Rightarrow (y - y_0)^2 = r^2 - (x - x_0)^2 \Rightarrow y - y_0 = \pm\sqrt{r^2 - (x - x_0)^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = y_0 \pm \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2} \ .$$

A validade da equação pode ser testada calculando alguns pontos de uma circunferência e posicionando esses pontos em um gráfico, como é feito no exemplo a seguir.

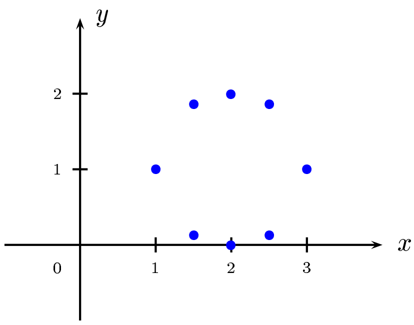
Ex.4: faça o gráfico da circunferência dada por $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$.

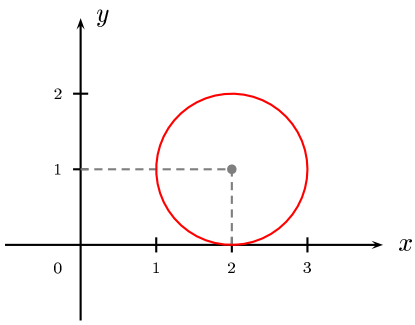
Solução: vamos isolar a variável y:

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1 \Rightarrow (y - 1)^2 = 1 - (x - 2)^2 \Rightarrow y - 1 = \pm\sqrt{1 - (x - 2)^2} \Rightarrow y = 1 \pm \sqrt{1 - (x - 2)^2} \ .$$

Agora, escolhemos alguns valores para x e calculamos seus respectivos valores em y. Usamos essa fórmula para calcular uma tabela com alguns pontos e, a partir disto, construimos a figura correspondente.

x	$f(x)$
0	$\nexists$
1	1
1,5	$\begin{cases} 1,866... \\ 0,133... \end{cases}$
2	$\begin{cases} 2 \\ 0 \end{cases}$
2,5	$\begin{cases} 1,866... \\ 0,133... \end{cases}$
3	1
4	$\nexists$

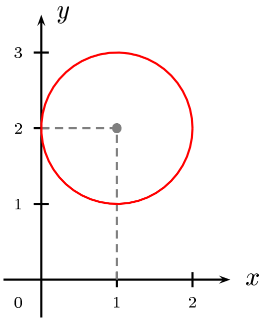




Vamos, agora, fazer os gráficos de algumas circunferências extraindo os dados diretamente de suas equações.

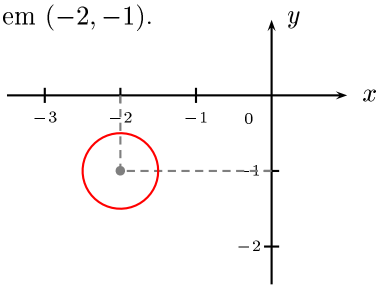
Ex.5: faça o gráfico da circunferência dada por $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$.

Solução: esta é uma circunferência de raio 1 centrada em $(1, 2)$.



Ex.6: faça o gráfico da circunferência dada por $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = \frac{1}{4}$.

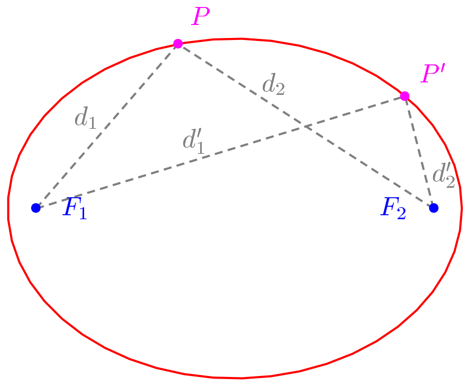
Solução: esta é uma circunferência de raio $r = \frac{1}{2}$ centrada em $(-2, -1)$.



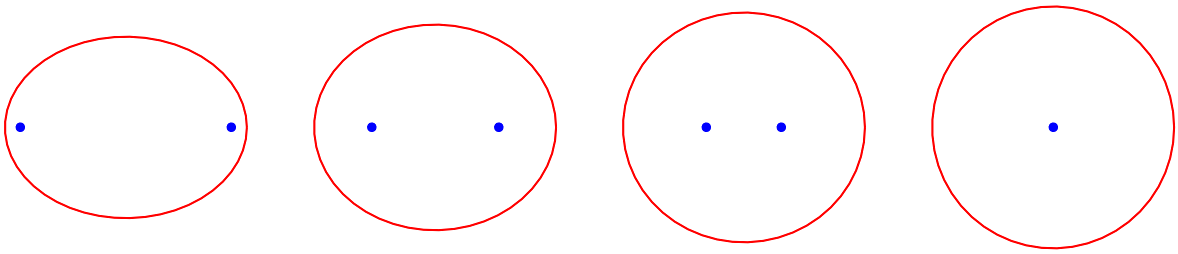
1.6 - Elipses

Elipses são regiões do plano tais que a soma de suas distâncias a dois pontos (chamados *focos* da elipse) é constante. Na figura ao lado, dados dois focos, F_1 e F_2, todos os pontos da curva são tais que a soma das distâncias até os dois focos é sempre a mesma. Isto é exemplificado pelos pontos P e P' da figura. Temos:

$$d_1 + d_2 = d_1' + d_2' \ .$$



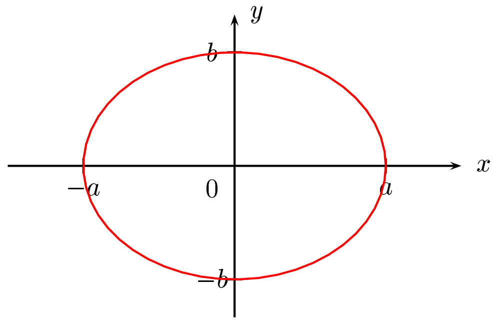
Note que, conforme os focos vão se aproximando, a forma da elipse fica mais arredondada até que, quando os focos conicidem, ela se torna uma circunferência.



A equação de uma elipse centrada em $(0,0)$ é dada por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ .$$

As constantes a e b determinam os comprimentos dos dois eixos da elipse.



Note que, quando os dois eixos são iguais, $a = b$, temos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = a^2 \ .$$

Esta é a equação de uma circunferência de raio a centrada em $(0,0)$. Portanto, a circunferência é um caso particular de elipse.

Podemos verificar a equação da elipse isolando a variável y:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \Rightarrow \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 - \frac{x^2}{a^2} \Rightarrow \frac{y}{b} = \pm\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \Rightarrow y = \pm b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \ .$$

Novamente, temos uma relação e não uma função. No exemplo seguinte é feito o gráfico de um caso específico de elipse.

Ex.1: faça o gráfico da elipse dada por $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$.

Solução: vamos primeiro isolar a variável y:

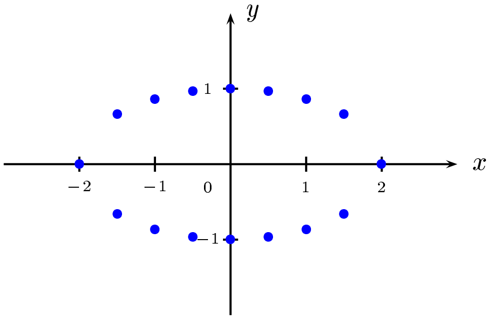
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{1} = 1 - \frac{x^2}{4} \Rightarrow y^2 = 1 - \frac{x^2}{4} \Rightarrow y = \pm\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} \ .$$

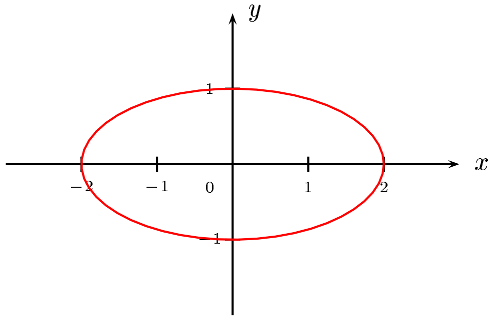
Agora, escolhemos alguns valores para x e calculamos seus respectivos valores em y. Para que o número dentro da raiz não seja negativo, devemos ter

$$1-\frac{x^2}{4}\geq 0 \Rightarrow \frac{4-x^2}{4}\geq 0 \Rightarrow 4-x^2\geq 0 \Rightarrow -x^2\geq -4 \Rightarrow x^2\leq 4 \Rightarrow -2\leq x\leq 2\ .$$

Usamos esses resultados para calcular uma tabela com alguns pontos e, a partir disto, construimos a figura correspondente.

x	$f(x)$
-2	0
$-1,5$	$\pm 0,661...$
-1	$\pm 0,866...$
$-0,5$	$\pm 0,968...$
0	± 1
$0,5$	$\pm 0,968...$
1	$\pm 0,866...$
$1,5$	$\pm 0,661...$
2	0

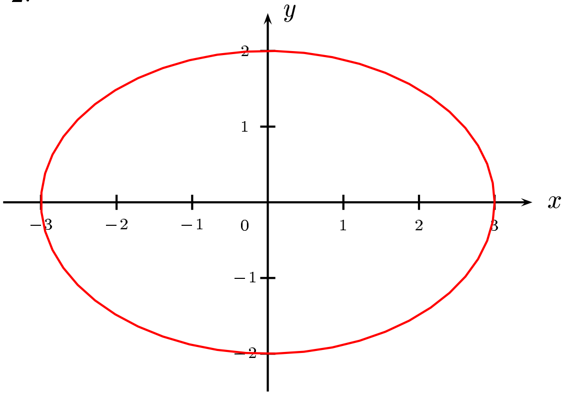




Podemos, também, fazer os gráficos de elipses tirando os dados diretamente de suas equações, como nos exemplos a seguir.

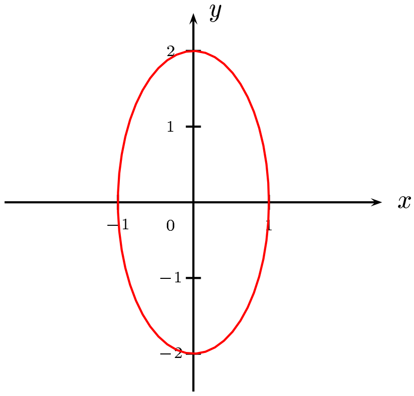
Ex.2: faça o gráfico da elipse dada por $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

Solução: esta é uma elipse centrada em $(0,0)$ com o eixo horizontal medindo 3 e o eixo vertical medindo 2.



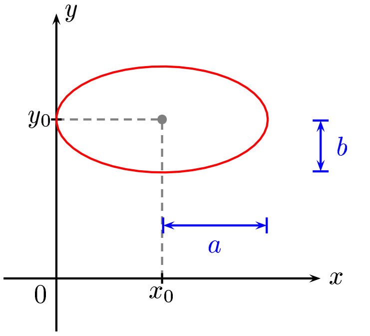
Ex.3: faça o gráfico da elipse dada por $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}=1$.

Solução: esta é uma elipse centrada em $(0,0)$ com o eixo horizontal medindo 1 e o eixo vertical medindo 2.



Podemos generalizar a equação da elipse para o caso em ela não está centrada na origem. A equação de uma elipse de eixo horizontal a e eixo vertical b centrada em um ponto (x_0,y_0) é dada por

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1\ .$$



O gráfico pode ser feito isolando a variável y e atribuindo valores à variável x:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2 \Rightarrow (y-y_0)^2=r^2-(x-x_0)^2 \Rightarrow y-y_0=\pm\sqrt{r^2-(x-x_0)^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y=y_0\pm\sqrt{r^2-(x-x_0)^2}\ .$$

A validade da equação pode ser testada calculando alguns pontos de uma circunferência e posicionando esses pontos em um gráfico, como é feito no exemplo a seguir.

Ex.4: faça o gráfico da elipse dada por $\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{1} = 1$.

Solução: vamos isolar a variável y:

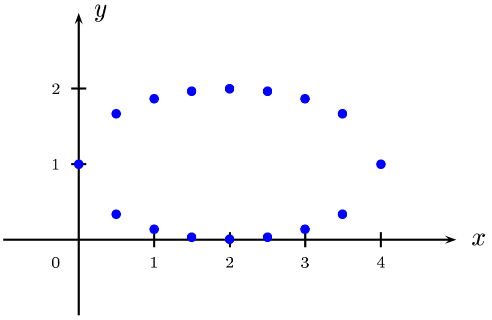
$$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{1} = 1 \Rightarrow \frac{(y-1)^2}{1} = 1 - \frac{(x-2)^2}{4} \Rightarrow (y-1)^2 = 1 - \frac{(x-2)^2}{4} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y - 1 = \pm\sqrt{1 - \frac{(x-2)^2}{4}} \Rightarrow y = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{(x-2)^2}{4}}\ .$$

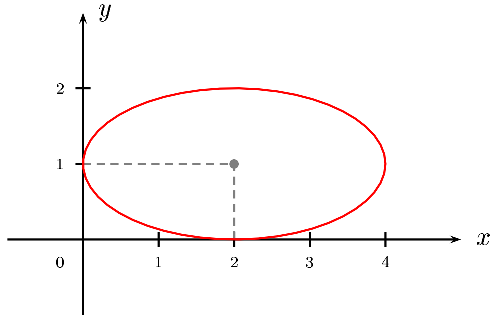
Agora, escolhemos alguns valores para x e calculamos seus respectivos valores em y. Usamos essa fórmula para calcular uma tabela com alguns pontos e, a partir disto, construimos a figura correspondente.

x	$f(x)$
-1	$\nexists$
0	1
$0,5$	$\begin{cases} 1,661... \\ 0,338... \end{cases}$
1	$\begin{cases} 1,866 \\ 0,133 \end{cases}$

x	$f(x)$
$1,5$	$\begin{cases} 1,968... \\ 0,031... \end{cases}$
2	$\begin{cases} 2 \\ 0 \end{cases}$
$2,5$	$\begin{cases} 1,968... \\ 0,031... \end{cases}$

x	$f(x)$
3	$\begin{cases} 1,866 \\ 0,133 \end{cases}$
$3,5$	$\begin{cases} 1,661... \\ 0,338... \end{cases}$
4	1
5	$\nexists$

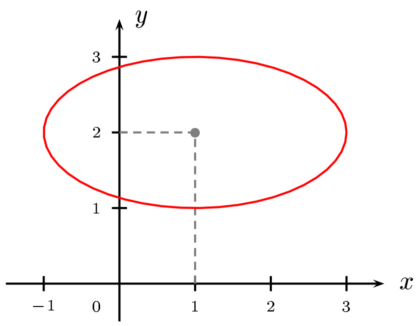




Vamos, agora, fazer os gráficos de algumas elipses extraindo os dados diretamente de suas equações.

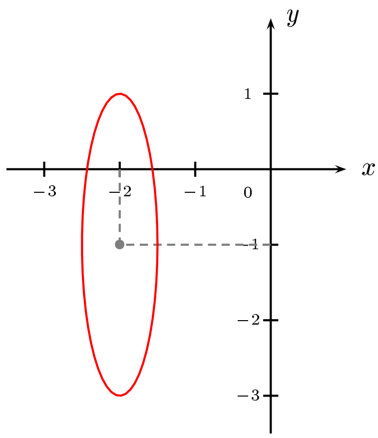
Ex.5: faça o gráfico da elipse dada por $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{1} = 1$.

Solução: esta é uma elipse centrada em $(1,2)$ com eixo horizontal 2 e eixo vertical 1.



Ex.6: faça o gráfico da elipse dada por $\frac{(x+2)^2}{1/4} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$.

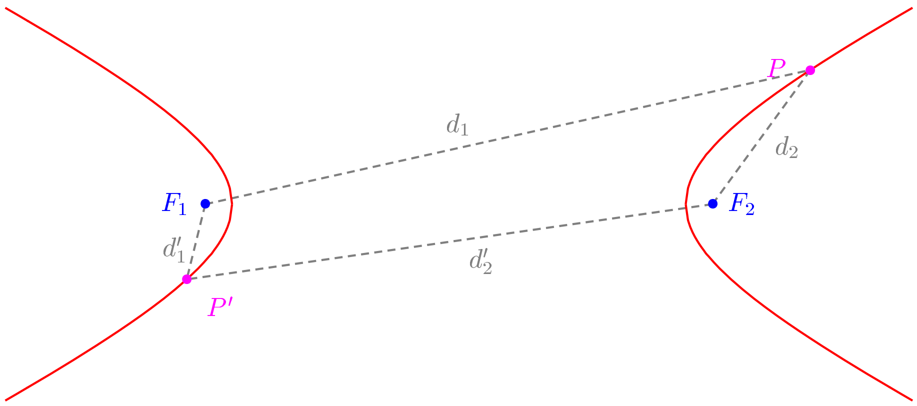
Solução: esta é uma elipse centrada em $(-2,-1)$ com eixo horizontal $\frac{1}{2}$ e eixo vertical 2.



1.7 - Hipérboles

Hipérboles são regiões do plano tais que o módulo da diferença de suas distâncias a dois pontos (chamados *focos* da elipse) é constante. Na figura ao lado, dados dois focos, F_1 e F_2, todos os pontos da curva são tais que o módulo da diferença das distâncias até os dois focos é sempre o mesmo. Isto é exemplificado pelos pontos P e P' da figura. Temos:

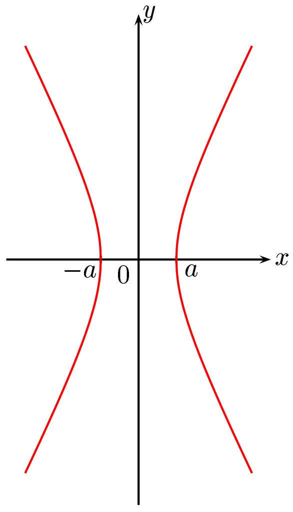
$$|d_1 - d_2| = |d_1' - d_2'| \ .$$

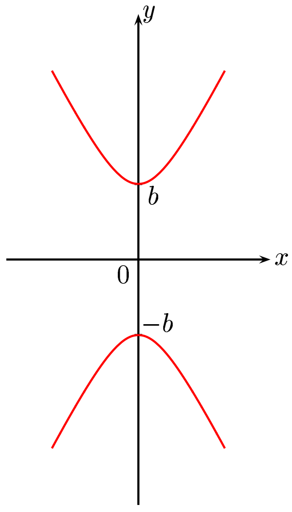


O centro da hipérbole é considerado como a metade do caminho enre as suas extremidades mais póximas. Apesar de ser desconexa, a hipérbole é considerada uma única curva e não duas.

É possível descrever hipérboles centradas em $(0, 0)$ por meio de duas equações, dependendo da orientação dos focos:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad\qquad \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$





Nas duas equações acima, podemos desenhar a curva isolando a variável y. Note que o resultado não será uma função. No exemplo seguinte, faremos isto para um caso específico de hipérbole.

Ex.1: faça o gráfico da hipérbole dada por $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$.

Solução: vamos primeiro isolar a variável y:

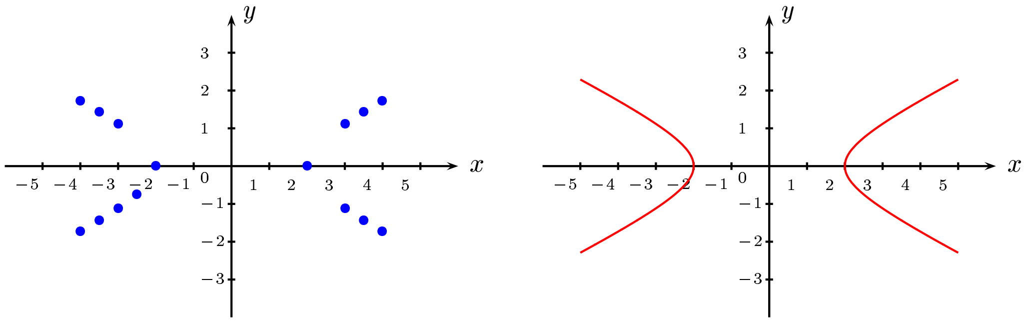
$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1 \Rightarrow -\frac{y^2}{1} = 1 - \frac{x^2}{4} \Rightarrow \frac{y^2}{1} = -1 + \frac{x^2}{4} \Rightarrow y^2 = \frac{x^2}{4} - 1 \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{x^2}{4} - 1} \ .$$

Agora, escolhemos alguns valores para x e calculamos seus respectivos valores em y. Para que o número dentro da raiz não seja negativo, devemos ter

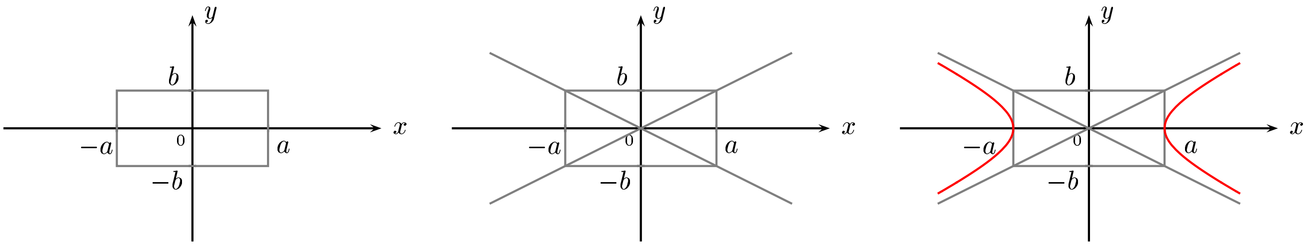
$$\frac{x^2}{4} - 1 \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2-4}{4} \geq 0 \Rightarrow x^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 4 \Rightarrow x \leq -2 \text{ ou } x \geq 2 \ .$$

Usamos esses resultados para calcular uma tabela com alguns pontos e, a partir disto, construimos a figura correspondente.

x	$f(x)$
-4	$\pm 1,732...$
$-3,5$	$\pm 1,436$
-3	$\pm 1,118...$
$-2,5$	$\pm 0,75$
-2	0
2	0
$2,5$	$\pm 0,75$
-3	$\pm 1,118...$
$3,5$	$\pm 1,436$
-4	$\pm 1,732...$

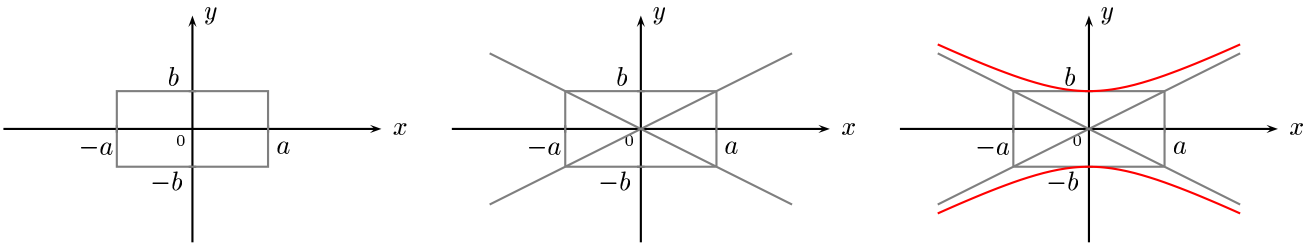


Existe uma forma mais fácil de esboçar uma hipérbole. No caso de equações do tipo $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, seguimos os seguintes passos: primeiro, desenhamos um retângulo onde as extremidades horizontais encontram-se em $x = -a$ e $x = a$ e as extremidades verticais em $y = -b$ e $y = b$.



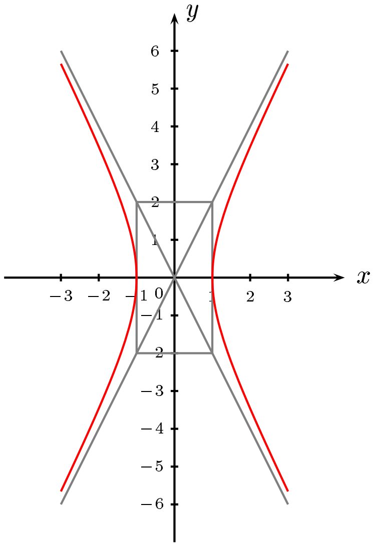
Depois, desenhamos duas retas: uma que passa pelos pontos $(-a, b)$ e $(0, 0)$ e outra que passa pelos pontos (a, b) e $(0, 0)$. Tendo essas retas, desenhamos hipérboles que vão se aproximando das retas conforme o módulo da variável x vai aumentando. Essas retas são chamadas *assíntotas* das hipérboles.

Um procedimento semelhante pode ser usado no caso das equações do tipo $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$. As figuras seguintes ilustram os passos para o desenho da hipérbole.



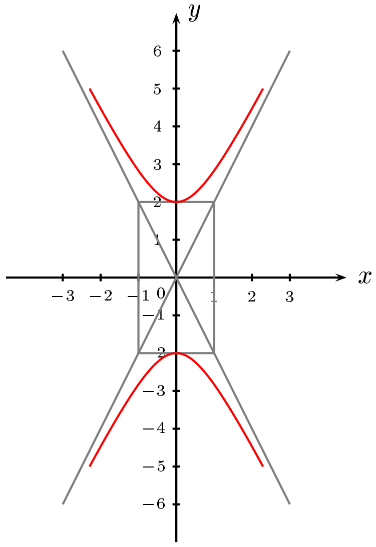
Ex.2: faça o gráfico da hipérbole dada por $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{4} = 1$.

Solução: vamos utilizar a técnica de desenhar as assíntotas para depois esboçar a hipérbole.



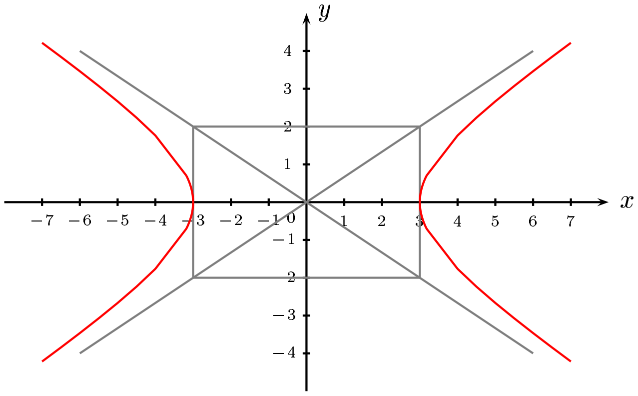
Ex.3: faça o gráfico da hipérbole dada por $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{1} = 1$.

Solução: novamente, iremos usar a técnica de desenhar as assíntotas.



Ex.4: faça o gráfico da hipérbole dada por $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$.

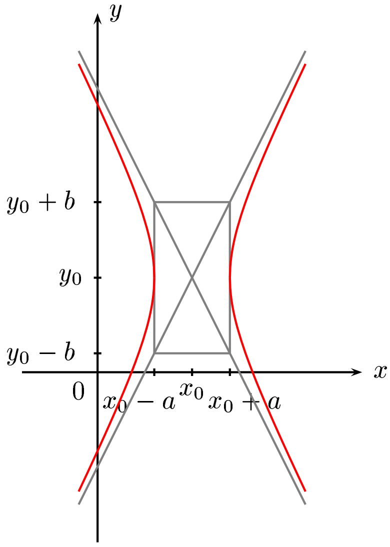
Solução:

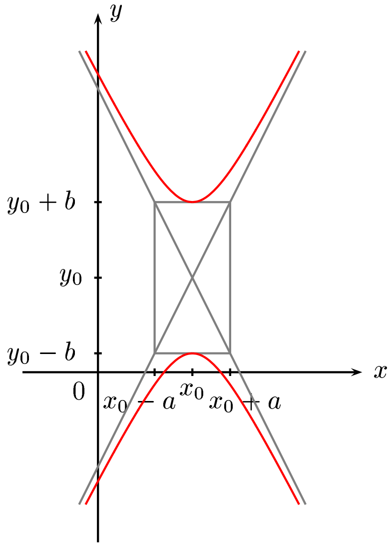


A generalização para equações que descrevem hipérboles centradas em um ponto arbitrário (x_0, y_0) é feita de modo semelhante ao das elipses:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(x-x_0)^2}{a^2} = 1 \ ,$$

conforme a orientação dos focos. A técnica de desenhar as assíntotas continua útil, sendo que agora temos que deslocar o retângulo que define as assíntotas de modo que estas se interceptem no ponto (x_0, y_0), como é mostrado nas figuras a seguir.

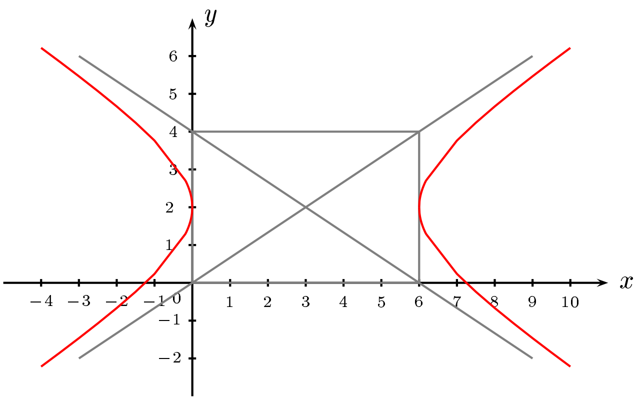




Vamos a dois exemplos.

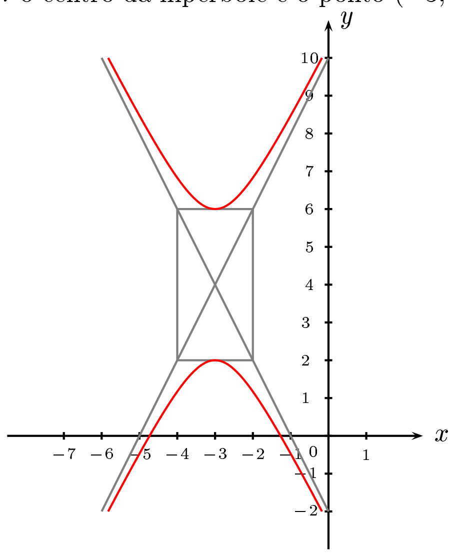
Ex.5: faça o gráfico da hipérbole dada por $\frac{(x-3)^2}{9}-\frac{(y-2)^2}{4}=1$.

Solução: o centro da hipérbole é o ponto $(3,2)$.



Ex.6: faça o gráfico da hipérbole dada por $\frac{(x+3)^2}{9}-\frac{(y-4)^2}{4}=1$.

Solução: o centro da hipérbole é o ponto $(-3,4)$.



Outras curvas podem ser traçadas em um plano, mas elas não serão do nosso interesse aqui. Estas que nós vimos neste capítulo (com exceção das retas) são chamadas *cônicas*, pois podem ser obtidas fazendo-se secções de um cone em diversos ângulos. As equações algébricas que nós vimos neste capítulo não são as mais gerais possíveis para as figuras de que estamos tratando. Uma generalização será dada no capítulo seguinte.