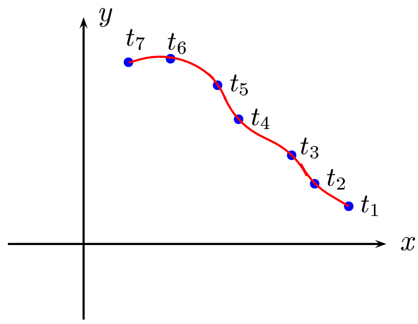
2 - Curvas no plano: equações paramétricas

Neste capítulo veremos como representar algumas curvas no plano em termos de *equações paramétricas*. Esses tipos de equações permitirão a representação de algumas curvas mais gerais que não são fáceis de representar na forma algébrica e facilitam a transição para curvas no espaço.

Equações paramétricas no plano correspondem a duas equações,

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x(t) \ , \\ y = y(t) \ , \end{array} \right.$$

onde as coordenadas x e y são dadas em termos de funções de um parâmetro t. Esse parâmetro pertence a um intervalo I contido no conjunto dos números reais (podendo corresponder ao conjunto $I\!R$ inteiro). Variando o parâmetro t, obtemos as coordenadas x e y dos pontos pertencentes à curva.



A seguir, estudaremos as equações paramétricas de alguns tipos particulares de curvas.

2.1 - Retas

As equações paramétricas de uma reta no plano podem ser escritas como

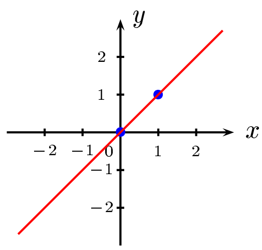
$$\left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + x_1 t \ , \\ y = y_0 + y_1 t \ , \end{array} \right.$$

onde x_0, x_1, y_0 e y_1 são constantes. A seguir, mostraremos exemplos dos gráficos produzidos por algumas equações paramétricas de retas.

Ex.1: faça o gráfico da reta dada por $\left\{ \begin{array}{l} x = t \ , \\ y = t \ . \end{array} \right.$

Solução: para plotar uma reta necessitamos somente de dois pontos. Para isto, escolhemos valores para o parâmetro t e calculamos os valores correspondentes das coordenadas x e y:

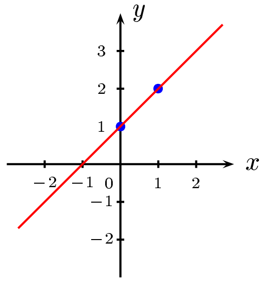
$$t = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \ , \\ y = 0 \ ; \end{array} \right. \qquad t = 1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \ , \\ y = 1 \ . \end{array} \right.$$



Ex.2: faça o gráfico da reta dada por $\begin{cases} x = t\ , \\ y = 1 + t\ . \end{cases}$

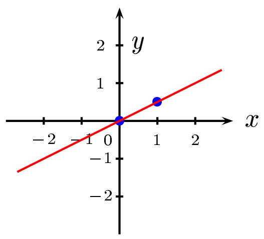
Solução:

$$t = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0\ , \\ y = 1 + 0 = 1\ ; \end{cases}$$
$$t = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1\ , \\ y = 1 + 1 = 2\ . \end{cases}$$



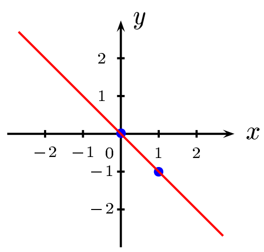
Ex.3: faça o gráfico da reta dada por $\begin{cases} x = t\ , \\ y = \frac{1}{2}t\ . \end{cases}$

Solução:
$$t = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0\ , \\ y = 0\ ; \end{cases}$$
$$t = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1\ , \\ y = \frac{1}{2}\ . \end{cases}$$



Ex.4: faça o gráfico da reta dada por $\begin{cases} x = t\ , \\ y = -t\ . \end{cases}$

Solução:
$$t = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0\ , \\ y = 0\ ; \end{cases}$$
$$t = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1\ , \\ y = -1\ . \end{cases}$$

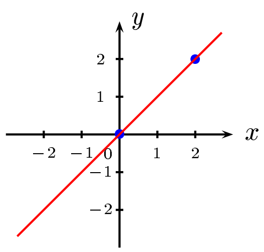


Existem inúmeras parametrizações equivalentes de uma determinada reta, algumas mais complexas que as outras. Nos exemplos abaixo, mostraremos duas outras parametrizações da reta do exemplo 1.

Ex.5: faça o gráfico da reta dada por $\begin{cases} x = 2t\ , \\ y = 2t\ . \end{cases}$

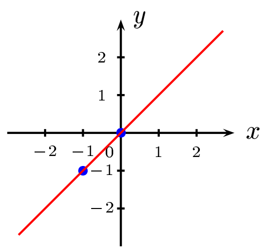
Solução: Vamos, novamente, escolher valores para o parâmetro t e calcular os valores correspondentes das coordenadas x e y:

$$t = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0\ , \\ y = 0\ ; \end{cases} \qquad t = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 2\ , \\ y = 2\ . \end{cases}$$



Ex.6: faça o gráfico da reta dada por $\begin{cases} x = t - 1\ , \\ y = t - 1\ . \end{cases}$

Solução:
$$t = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1\ , \\ y = -1\ ; \end{cases} \qquad t = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 0\ , \\ y = 0\ . \end{cases}$$



2.2 - Parábolas

As equações paramétricas de uma parábola no plano podem ser escritas como

$$\begin{cases} x = x_0 + x_1 t + x_2 t^2\ , \\ y = y_0 + y_1 t + y_2 t^2\ , \end{cases}$$

onde x_0, x_1, x_2, y_0, y_1 e y_2 são constantes. Esta forma corresponde a parábolas mais gerais que as vistas no capítulo 1. Agora, as parábolas não precisam mais ser simétricas com relação ao eixo x ou ao eixo y, como será mostrado em alguns exemplos desta seção.

A seguir, serão mostrados alguns exemplos de parábolas descritas por equações paramétricas.

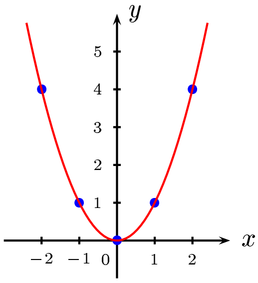
Ex.1: faça o gráfico da parábola dada por
$$\begin{cases} x = t \ , \\ y = t^2 \ . \end{cases}$$

Solução: para desenharmos a parábola, será necessário calcular um número maior de pontos:

$$t = -2 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \ , \\ y = (-2)^2 = 4 \ ; \end{cases}$$
$$t = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \ , \\ y = (-1)^2 = 1 \ ; \end{cases}$$
$$t = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \ , \\ y = 0^2 = 0 \ ; \end{cases}$$
$$t = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \ , \\ y = 1^2 = 1 \ ; \end{cases}$$
$$t = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \ , \\ y = 2^2 = 4 \ . \end{cases}$$

Com isto, podemos montar a tabela abaixo. Os pontos estão representados no gráfico e são utilizados para traçar a parábola.

t	x	y
-2	-2	4
-1	-1	1
0	0	0
1	1	1
2	2	4

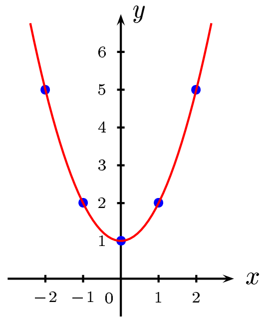


Ex.2: faça o gráfico da parábola dada por
$$\begin{cases} x = t \ , \\ y = 1 + t^2 \ . \end{cases}$$

Solução:
$$t = -2 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \ , \\ y = 1 + (-2)^2 = 5 \ ; \end{cases}$$
$$t = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \ , \\ y = 1 + (-1)^2 = 2 \ ; \end{cases}$$
$$t = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \ , \\ y = 1 + 0^2 = 1 \ ; \end{cases}$$
$$t = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \ , \\ y = 1 + 1^2 = 2 \ ; \end{cases}$$
$$t = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \ , \\ y = 1 + 2^2 = 5 \ . \end{cases}$$

Com isto, montamos a tabela abaixo, a partir da qual traçamos o gráfico da parábola.

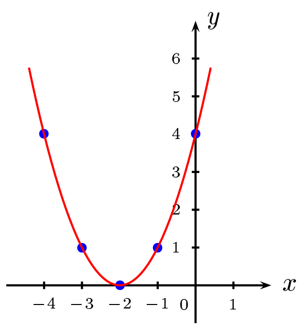
t	x	y
-2	-2	5
-1	-1	2
0	0	1
1	1	2
2	2	5



Ex.3: faça o gráfico da parábola dada por
$$\begin{cases} x = -2 + t \ , \\ y = t^2 \ . \end{cases}$$

Solução: escolhendo os valores $t = -2$, $t = -1$, $t = 0$, $t = 1$ e $t = 2$, obtemos os pontos da tabela abaixo, a partir dos quais podemos desenhar a parábola.

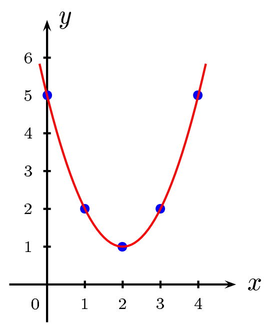
t	x	y
-2	-4	4
-1	-3	1
0	-2	0
1	-1	1
2	0	4



Ex.4: faça o gráfico da parábola dada por
$$\begin{cases} x = 2 + t \ , \\ y = 1 + t^2 \ . \end{cases}$$

Solução: escolhendo os valores $t = -2$, $t = -1$, $t = 0$, $t = 1$ e $t = 2$, obtemos os pontos da tabela abaixo, a partir dos quais podemos desenhar a parábola.

t	x	y
-2	0	5
-1	1	2
0	2	1
1	3	2
2	4	5



De modo geral, qualquer parábola cujo eixo de simetria é paralelo ao eixo y pode ser parametrizada por equações do tipo
$$\begin{cases} x = x_0 + x_1 t \ , \\ y = y_0 + y_2 t^2 \ . \end{cases}$$

A seguir, mostramos exemplos de parábolas cujo eixo de simetria é paralelo ao eixo x. Estas podem ser escritas como

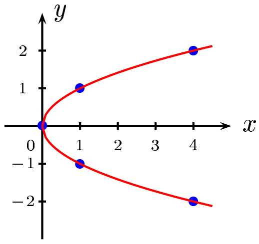
$$\begin{cases} x = x_0 + x_2 t^2 \ , \\ y = y_0 + y_1 t \ . \end{cases}$$

Obs.: lembremos que existem outras (infinitas) formas de parametrizar essas mesmas parábolas.

Ex.5: faça o gráfico da parábola dada por $\begin{cases} x = t^2 \ , \\ y = t \ . \end{cases}$

Solução: escolhendo os valores $t = -2$, $t = -1$, $t = 0$, $t = 1$ e $t = 2$, temos

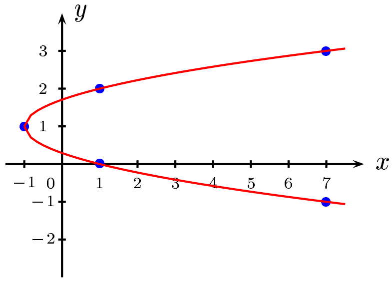
t	x	y
-2	4	-2
-1	1	-1
0	0	0
1	1	1
2	4	2



Ex.6: faça o gráfico da parábola dada por $\begin{cases} x = -1 + 2t^2 \ , \\ y = 1 + t \ . \end{cases}$

Solução: escolhendo os valores $t = -2$, $t = -1$, $t = 0$, $t = 1$ e $t = 2$, temos

t	x	y
-2	7	-1
-1	1	0
0	-1	1
1	1	2
2	7	3



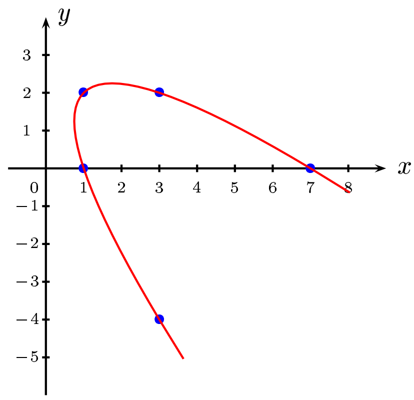
Para os casos mais gerais, escritos como $\begin{cases} x = x_0 + x_1 t + x_2 t^2 \ , \\ y = y_0 + y_1 t + y_2 t^2 \ , \end{cases}$

os eixos de simetria das parábolas não são mais necessariamente paralelos ao eixo x ou ao eixo y, como mostrado nos exemplos a seguir.

Ex.7: faça o gráfico da parábola dada por $\begin{cases} x = 1 + t + t^2 \ , \\ y = 2 + t - t^2 \ . \end{cases}$

Solução: escolhendo os valores $t = -2$, $t = -1$, $t = 0$, $t = 1$ e $t = 2$, obtemos os pontos da tabela abaixo, a partir dos quais podemos desenhar a parábola.

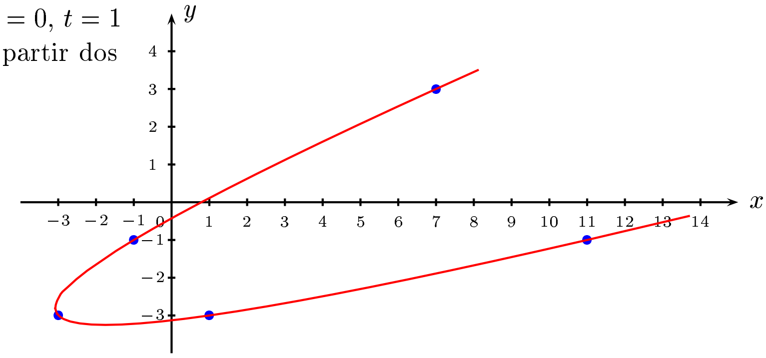
t	x	y
-2	3	-4
-1	1	0
0	1	2
1	3	2
2	7	0



Ex.8: faça o gráfico da parábola dada por $\begin{cases} x = -3 - t + 3t^2 \ , \\ y = -3 + t + t^2 \ . \end{cases}$

Solução: escolhendo os valores $t = -2$, $t = -1$, $t = 0$, $t = 1$ e $t = 2$, obtemos os pontos da tabela abaixo, a partir dos quais podemos desenhar a parábola.

t	x	y
-2	11	-1
-1	1	-3
0	-3	-3
1	-1	-1
2	7	3



2.3 - Circunferências

Cmo veremos aqui, a representação paramétrica de circunferências está associada às funções trigonométricas. As equações paramétricas de uma circunferência no plano podem ser escritas como

$$\begin{cases} x = x_0 + r\cos t \ , \\ y = y_0 + r\,\mathrm{sen}\, t \ , \end{cases}$$

onde x_0, x_1 e r são constantes. Esta forma corresponde à equação de uma circunferência de raio r centrada no ponto (x_0, y_0). Uma circunferência de raio r centrada em $(0,0)$ tem equaç oes mais simples:

$$\begin{cases} x = r\cos t \ , \\ y = r\,\mathrm{sen}\, t \ . \end{cases}$$

No caso geral, outra parametrização (lembrando que existem infinitas parametrizações possíveis) é

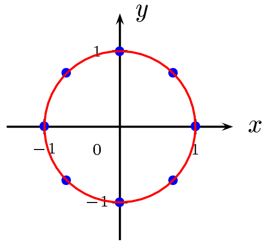
$$\begin{cases} x = x_0 + r\,\mathrm{sen}\, t \ , \\ y = y_0 + r\cos t \ . \end{cases}$$

A seguir, serão mostrados alguns exemplos de circunferências descritas por equações paramétricas.

Ex.1: faça o gráfico da circunferência dada por $\begin{cases} x = \cos t \ , \\ y = \ \mathrm{sen}\, t \ . \end{cases}$

Solução: para desenharmos a circunferência, podemos escolher alguns valores para o parâmetro t de modo a montar a tabela abaixo e depois usamos esses valores para plotar a curva.

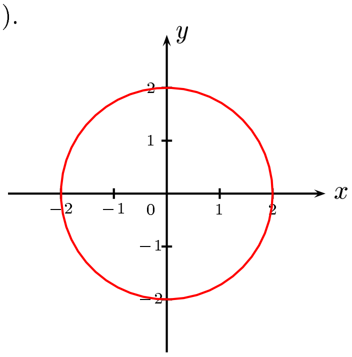
t	x	y
0	1	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707$
$\frac{\pi}{2}$	0	1
$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}} \approx -0,707$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707$
π	-1	0
$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}} \approx -0,707$	$-\frac{1}{\sqrt{2}} \approx -0,707$
$\frac{3\pi}{4}$	0	-1
$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707$	$-\frac{1}{\sqrt{2}} \approx -0,707$
2π	1	0



Como no caso das equações algébricas de circunferências, é mais fácil desenharmos a curva lendo os parâmetros (centro e raio) diretamente das equações paramétricas. Isto é feito nos exemplos a seguir.

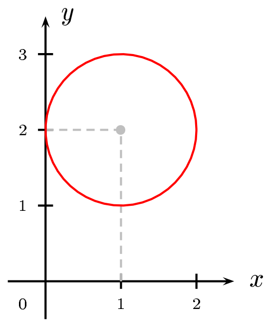
Ex.2: faça o gráfico da circunferência dada por
$\begin{cases} x = 2\cos t \ , \\ y = 2\,\mathrm{sen}\, t \ . \end{cases}$

Solução: esta é uma circunferência de raio 2 centrada em $(0,0)$.



Ex.3: faça o gráfico da circunferência dada por
$\begin{cases} x = 1 + \cos t \ , \\ y = 2 + \ \mathrm{sen}\, t \ . \end{cases}$

Solução: esta é uma circunferência de raio 1 centrada em $(1,2)$.



2.4 - Elipses

As equações paramétricas de uma elipse no plano podem ser escritas como uma generalização das equações paramétricas de uma circunferência:

$$\begin{cases} x = x_0 + a\cos t\ , \\ y = y_0 + b\,\mathrm{sen}\,t\ , \end{cases}$$

onde x_0, x_1, a e b são constantes. Esta forma corresponde à equação de uma elipse de semi-eixos a e b centrada no ponto (x_0, y_0). Uma elipse centrada em $(0, 0)$ tem como equações

$$\begin{cases} x = a\cos t\ , \\ y = b\,\mathrm{sen}\,t\ . \end{cases}$$

Uma forma mais geral de representação de elipse. onde os semi-eixos não são paralelos aos eixos x ou y, pode ser dada por

$$\begin{cases} x = x_0 + a\cos t + b\,\mathrm{sen}\,t\ , \\ y = y_0 + c\cos t + d\,\mathrm{sen}\,t\ , \end{cases}$$

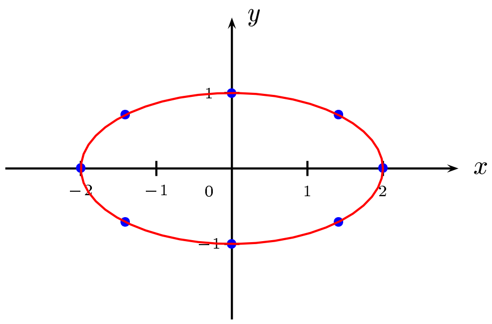
onde x_0, y_0, a, b, c e d são constantes.

A seguir, serão mostrados alguns exemplos de elipses descritas por equações paramétricas.

Ex.1: faça o gráfico da elipse dada por $\begin{cases} x = 2\cos t\ , \\ y = \ \mathrm{sen}\,t\ . \end{cases}$

Solução: para desenharmos a elipse, podemos escolher alguns valores para o parâmetro t de modo a montar a tabela abaixo e depois usamos esses valores para plotar a curva.

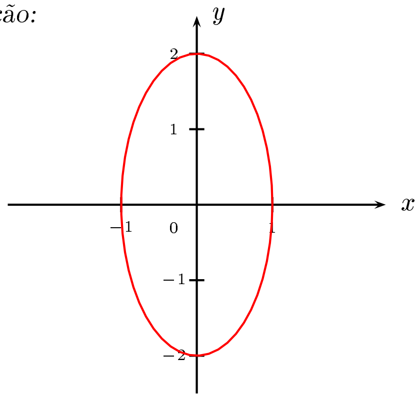
t	x	y
0	2	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{2}{\sqrt{2}} \approx 1,414$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707$
$\frac{\pi}{2}$	0	1
$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{2}{\sqrt{2}} \approx -1,414$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707$
π	-2	0
$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{2}{\sqrt{2}} \approx -1,414$	$-\frac{1}{\sqrt{2}} \approx -0,707$
$\frac{3\pi}{4}$	0	-1
$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{2}{\sqrt{2}} \approx 1,414$	$-\frac{1}{\sqrt{2}} \approx -0,707$
2π	2	0



Podemos também desenhar as elipses lendo os dados diretamente das equações paramétricas, como nos exemplos seguintes.

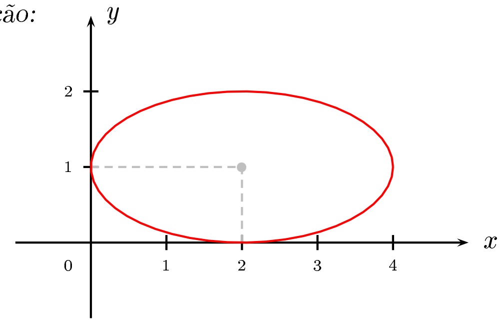
Ex.2: faça o gráfico da elipse dada por
$\begin{cases} x = \cos t\ , \\ y = 2\,\mathrm{sen}\,t\ . \end{cases}$

Solução:



Ex.3: faça o gráfico da elipse dada por
$\begin{cases} x = 2 + 2\cos t\ , \\ y = 1 + \ \mathrm{sen}\,t\ . \end{cases}$

Solução:

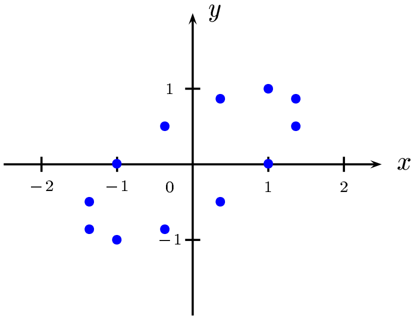


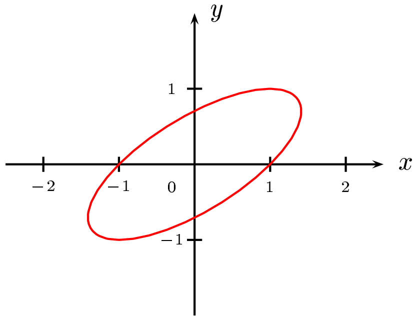
Os próximos dois exemplos ilustram o caso mais geral, em que os semi-eixos não precisam ser paralelos aos eixos coordenados. Nesse caso, não podemos ler a forma da elipse direto das equações paramétricas. Para desenhar as curvas, calculamos alguns dos pontos desta usando as equações paramétricas.

Ex.4: faça o gráfico da elipse dada por $\begin{cases} x = \cos t + \operatorname{sen} t \ , \\ y = \cos t \ . \end{cases}$

Solução: atribuindo alguns valores para t, montamos uma tabela e depois traçamos o gráfico.

t	x	y
0	1	1
$\frac{\pi}{6}$	$\approx 1,366$	$\approx 0,866$
$\frac{\pi}{3}$	$\approx 1,366$	$0,5$
$\frac{\pi}{2}$	1	0
$\frac{2\pi}{3}$	$\approx 0,366$	$-0,5$
$\frac{5\pi}{6}$	$\approx -0,366$	$\approx -0,866$
π	-1	-1
$\frac{7\pi}{6}$	$\approx -1,366$	$\approx -0,866$
$\frac{4\pi}{3}$	$\approx -1,366$	$-0,5$
$\frac{3\pi}{2}$	-1	0
$\frac{5\pi}{3}$	$\approx -0,366$	$0,5$
$\frac{11\pi}{6}$	$\approx 0,123$	$\approx 0,866$
2π	1	1

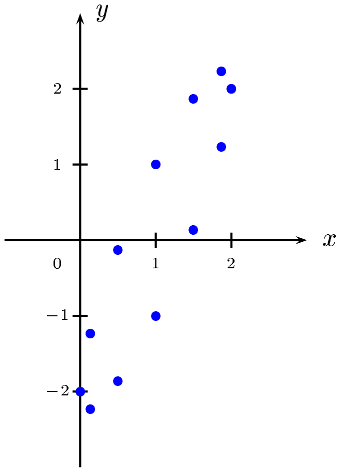


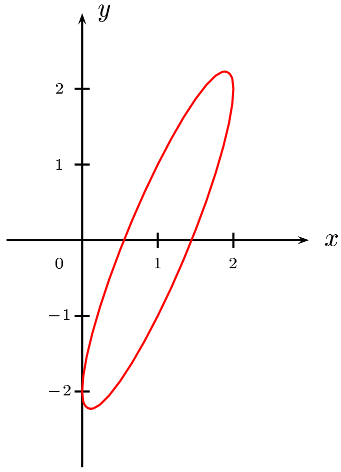


Ex.5: faça o gráfico da elipse dada por $\begin{cases} x = 1 + \cos t \ , \\ y = \cos t - \operatorname{sen} t \ . \end{cases}$

Solução: atribuindo alguns valores para t, montamos uma tabela e depois traçamos o gráfico.

t	x	y
0	2	2
$\frac{\pi}{6}$	$\approx 1,866$	$\approx 1,232$
$\frac{\pi}{3}$	$1,5$	$\approx 0,134$
$\frac{\pi}{2}$	1	-1
$\frac{2\pi}{3}$	$0,5$	$\approx -1,866$
$\frac{5\pi}{6}$	$\approx 0,134$	$\approx -2,232$
π	0	-2
$\frac{7\pi}{6}$	$\approx 0,134$	$\approx -1,232$
$\frac{4\pi}{3}$	$0,5$	$\approx -0,134$
$\frac{3\pi}{2}$	1	1
$\frac{5\pi}{3}$	$1,5$	$\approx 1,866$
$\frac{11\pi}{6}$	$\approx 1,866$	$\approx 2,232$
2π	2	2





Existem dois casos particulares em que a curva obtida é uma circunferência (lembre que uma circunferência é um caso particular de elipse). Eles são dados por

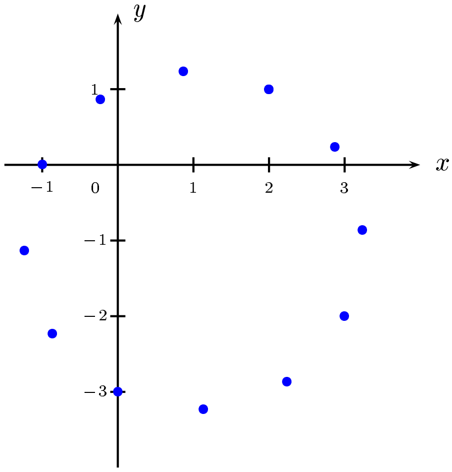
$$\begin{cases} x = x_0 + a\cos t + b\operatorname{sen} t \ , \\ y = y_0 + b\cos t - a\operatorname{sen} t \ , \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = x_0 + a\cos t + b\operatorname{sen} t \ , \\ y = y_0 - b\cos t + a\operatorname{sen} t \ , \end{cases}$$

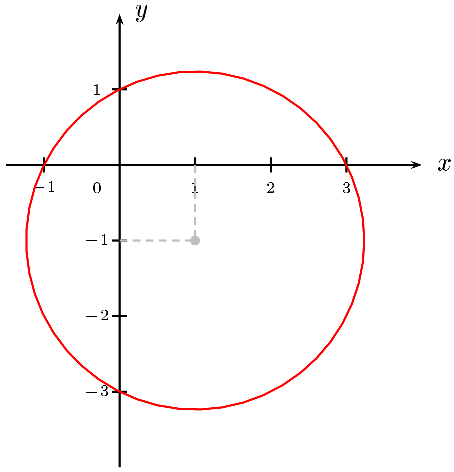
onde a e b são constantes. Ambas as equações determinam uma circunferência de raio $\sqrt{a^2+b^2}$ centrada em (x_0, y_0).

Ex.6: faça o gráfico da elipse dada por $\begin{cases} x = 1 + \cos t + 2\operatorname{sen} t \ , \\ y = -1 + 2\cos t - \operatorname{sen} t \ . \end{cases}$

Solução: esta é uma circunferência de raio $r = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$ centrada em $(1, -1)$.

t	x	y
0	2	1
$\frac{\pi}{6}$	$\approx 2,866$	$\approx 0,232$
$\frac{\pi}{3}$	$\approx 3,232$	$\approx -0,866$
$\frac{\pi}{2}$	3	-2
$\frac{2\pi}{3}$	$\approx 2,232$	$\approx -2,866$
$\frac{5\pi}{6}$	$\approx 1,134$	$\approx -3,232$
π	0	-3
$\frac{7\pi}{6}$	$\approx -0,866$	$\approx -2,232$
$\frac{4\pi}{3}$	$\approx -1,232$	$\approx -1,134$
$\frac{3\pi}{2}$	-1	0
$\frac{5\pi}{3}$	$\approx -0,232$	$\approx 0,866$
$\frac{11\pi}{6}$	$\approx 0,866$	$\approx 1,232$
2π	2	1





2.5 - Hipérboles

As equações paramétricas de uma hipérbole no plano podem ser escritas de uma forma semelhante à da elipse. No entanto, utilizamos agora o *seno hiperbólico* (senh t) e o *cosseno hiperbólico* ($\cosh t$), que têm a seguinte propriedade:

$$\cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1 \ .$$

Essas duas funções têm suas origens e nomes ligados à parametrização da hipérbole. Em termos dessas duas funções, temos que hipérboles podem ser parametrizadas por

$$\begin{cases} x = x_0 + a\cosh t \ , \\ y = y_0 + b \operatorname{senh} t \ , \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} x = x_0 - a\cosh t \ , \\ y = y_0 - b \operatorname{senh} t \ , \end{cases}$$

onde x_0, x_1, a e b são constantes. Esta forma corresponde à equação de uma hipérbole centrada no ponto (x_0, y_0) cujo eixo de simetria é paralelo ao eixo y. A novidade aqui é que cada sistema de equações paramétricas descreve um lado da hipérbole.

Hipérboles centradas em x_0, y_0 cujos eixos de simetria são paralelos ao eixo x são dadas por

$$\begin{cases} x = x_0 + a \operatorname{senh} t \ , \\ y = y_0 + b\cosh t \ , \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} x = x_0 - a \operatorname{senh} t \ , \\ y = y_0 - b\cosh t \ . \end{cases}$$

Hipérboles mais gerais, onde os semi-eixos não são paralelos aos eixos x ou y, podem ser dada por

$$\begin{cases} x = x_0 + a\cosh t + b \operatorname{senh} t \ , \\ y = y_0 + c\cosh t + d \operatorname{senh} t \ , \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} x = x_0 - a\cosh t - b \operatorname{senh} t \ , \\ y = y_0 - c\cosh t - d \operatorname{senh} t \ , \end{cases}$$

onde x_0, y_0, a, b, c e d são constantes.

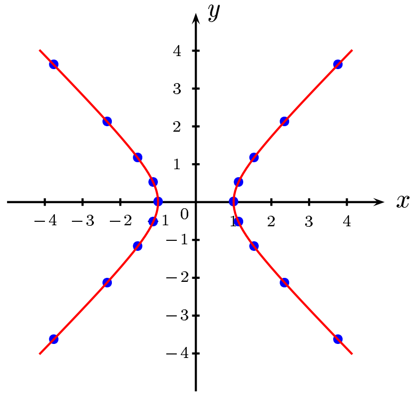
A seguir, serão mostrados alguns exemplos de hipérboles descritas por equações paramétricas.

Ex.1: faça o gráfico da hipérbole dada por $\begin{cases} x = \cosh t \ , \\ y = \operatorname{senh} t \ . \end{cases}$ e $\begin{cases} x = -\cosh t \ , \\ y = -\operatorname{senh} t \ . \end{cases}$

Solução: para desenharmos a hipérbole, podemos escolher alguns valores para o parâmetro t de modo a montar as tabelas abaixo e depois usamos esses valores para plotar a curva.

t	x	y
-2	$\approx 3,762$	$\approx -3,627$
$-1,5$	$\approx 2,352$	$\approx -2,129$
-1	$\approx 1,543$	$\approx -1,175$
$-0,5$	$\approx 1,128$	$\approx -0,521$
0	1	0
$0,5$	$\approx 1,128$	$\approx 0,521$
1	$\approx 1,543$	$\approx 1,175$
$1,5$	$\approx 2,352$	$\approx 2,129$
2	$\approx 3,762$	$\approx 3,762$

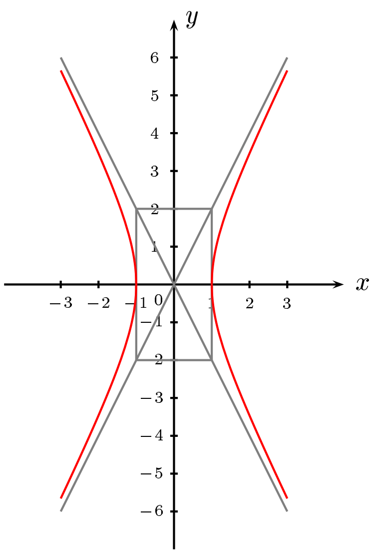
t	x	y
-2	$\approx -3,762$	$\approx 3,627$
$-1,5$	$\approx -2,352$	$\approx 2,129$
-1	$\approx -1,543$	$\approx 1,175$
$-0,5$	$\approx -1,128$	$\approx 0,521$
0	-1	0
$0,5$	$\approx -1,128$	$\approx -0,521$
1	$\approx -1,543$	$\approx -1,175$
$1,5$	$\approx -2,352$	$\approx -2,129$
2	$\approx -3,762$	$\approx -3,762$



Podemos também desenhar as hipérboles lendo os dados diretamente das equações paramétricas e utilizando a técnica aprendida no capítulo 1 de desenhar as assíntotas. Isto é mostrado nos exemplos a seguir.

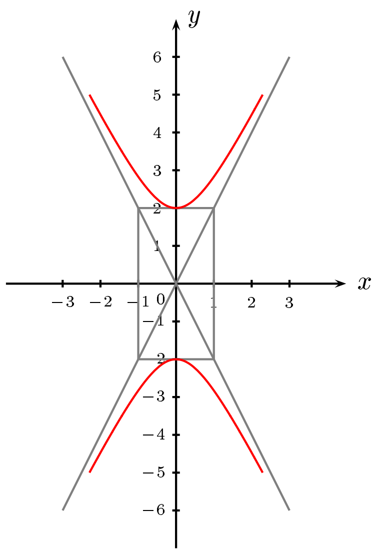
Ex.2: faça o gráfico da hipérbole dada por $\begin{cases} x = \cosh t \ , \\ y = 2 \operatorname{senh} t \ . \end{cases}$ e $\begin{cases} x = -\cosh t \ , \\ y = -2 \operatorname{senh} t \ . \end{cases}$

Solução: vamos utilizar a técnica de desenhar as assíntotas para depois esboçar a hipérbole.



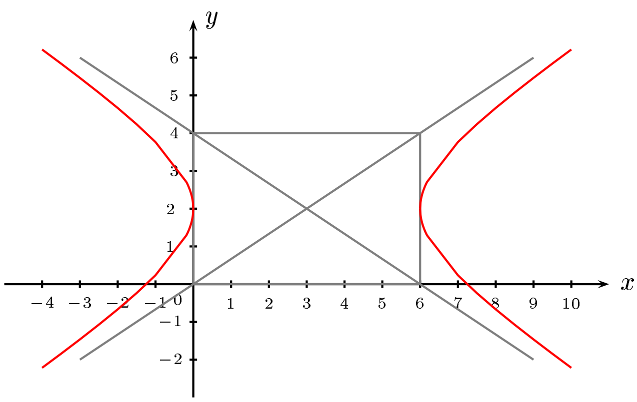
Ex.3: faça o gráfico da hipérbole dada por $\begin{cases} x = \operatorname{senh} t \ , \\ y = 2 \cosh t \ . \end{cases}$ e $\begin{cases} x = -\operatorname{senh} t \ , \\ y = -2 \cosh t \ . \end{cases}$

Solução: novamente, iremos usar a técnica de desenhar as assíntotas.



Ex.4: faça o gráfico da hipérbole dada por $\begin{cases} x = 3 + 3\cosh t \ , \\ y = 2 + 2 \operatorname{senh} t \ . \end{cases}$ e $\begin{cases} x = 3 - 3\cosh t \ , \\ y = 2 - 2 \operatorname{senh} t \ . \end{cases}$

Solução: o centro da hipérbole é o ponto $(3, 2)$.



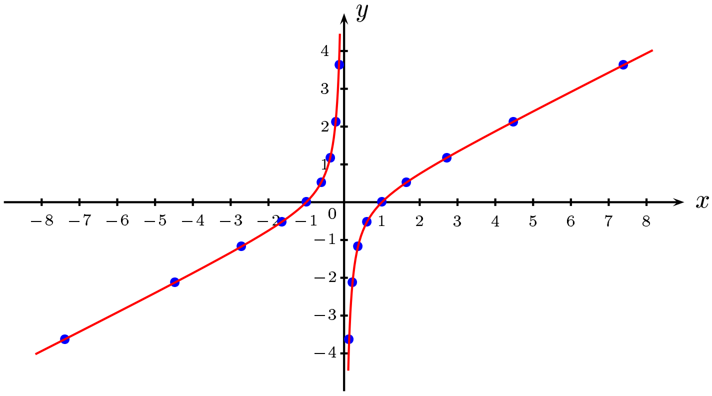
O próximo exemplo ilustra o caso mais geral, em que os semi-eixos não precisam ser paralelos aos eixos coordenados. Nesse caso, não podemos ler a forma da hipérbole diretamente das equações paramétricas. Para desenhar as curvas, calculamos alguns dos pontos desta usando as equações paramétricas.

Ex.5: faça o gráfico da hipérbole dada por $\begin{cases} x = \cosh t + \operatorname{senh} t\ , \\ y = \operatorname{senh} t\ . \end{cases}$ e $\begin{cases} x = -\cosh t - \operatorname{senh} t\ , \\ y = -\operatorname{senh} t\ . \end{cases}$

Solução: primeiro, montamos as tabelas abaixo e depois usamos esses valores para plotar a curva.

t	x	y
-2	$\approx 0,135$	$\approx -3,627$
$-1,5$	$\approx 0,223$	$\approx -2,129$
-1	$\approx 0,368$	$\approx -1,175$
$-0,5$	$\approx 0,606$	$\approx -0,521$
0	1	0
$0,5$	$\approx 1,649$	$\approx 0,521$
1	$\approx 2,718$	$\approx 1,175$
$1,5$	$\approx 4,482$	$\approx 2,129$
2	$\approx 7,389$	$\approx 3,762$

t	x	y
-2	$\approx -0,135$	$\approx 3,627$
$-1,5$	$\approx -0,223$	$\approx 2,129$
-1	$\approx -0,368$	$\approx 1,175$
$-0,5$	$\approx -0,606$	$\approx 0,521$
0	-1	0
$0,5$	$\approx -1,649$	$\approx -0,521$
1	$\approx -2,718$	$\approx -1,175$
$1,5$	$\approx -4,482$	$\approx -2,129$
2	$\approx -7,389$	$\approx -3,762$

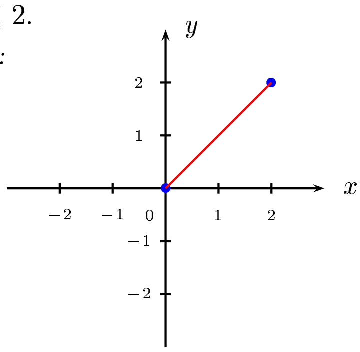


2.6 - Curvas finitas

Todas as curvas estudadas até agora são infinitas. Isto é porque estmos tomando os parâmetros t de cada curva como indo de $-\infty$ a ∞. No entanto, odemos gerar curvas finitas tomando valores finitos para o parâmetro t. A seguir, veremos alguns exemplos da parametrização de curvas finitas.

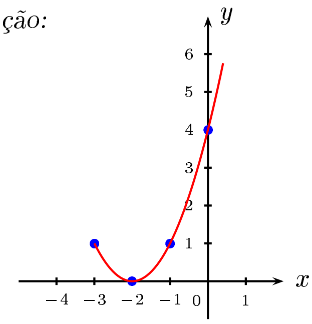
Ex.1: faça o gráfico da reta dada por $\begin{cases} x = t\ , \\ y = t\ , \end{cases}$ $0 \leq t \leq 2$.

Solução:



Ex.2: faça o gráfico da parábola dada por $\begin{cases} x = -2 + t\ , \\ y = t^2\ , \end{cases}$ $t \geq -3$.

Solução:



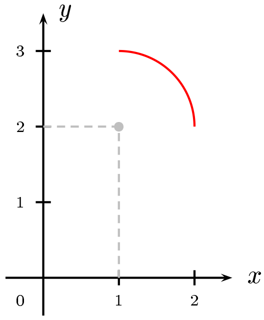
Obs.: a curva descrita no exemplo 2 não é finita, pois ela vai do ponto $(-3, 1)$ *até o infinito.*

Temos que salientar que as curvas descritas acima não são retas nem parábolas. Podemos chamar a curva do exemplo 1 de semi-reta ou segmento de reta e à curva d exemplo 2 de semi-parábola ou segmento de parábola.

Ex.3: faça o gráfico da circunferência dada por

$$\begin{cases} x = 1 + \cos t \ , \\ y = 2 + \operatorname{sen} t \ , \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

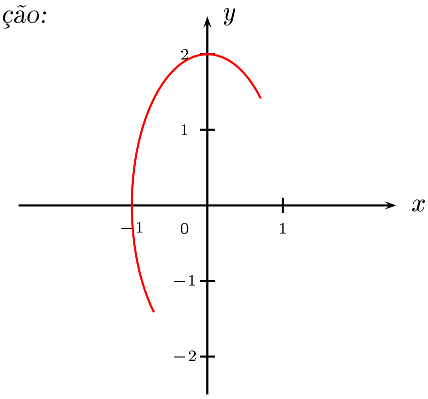
Solução: esta é uma circunferência de raio 1 centrada em $(1, 2)$.



Ex.4: faça o gráfico da elipse dada por

$$\begin{cases} x = \cos t \ , \\ y = 2 \operatorname{sen} t \ , \end{cases} \quad \frac{\pi}{4} \leq t \frac{5\pi}{4}.$$

Solução:



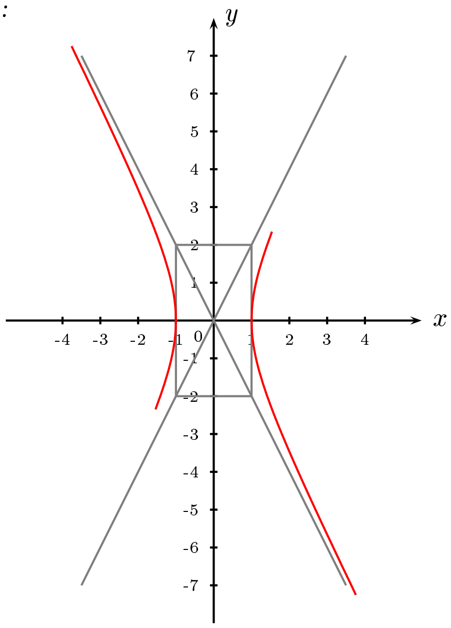
No caso de curvas finitas baseadas em hipérboles, podemos escolher curvas parametrizadas por uma ou duas das equações paramétricas, como nos exemplos a seguir.

Ex.5: faça o gráfico da hipérbole dada por

$$\begin{cases} x = \cosh t \ , \\ y = 2 \operatorname{senh} t \ . \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = -\cosh t \ , \\ y = -2 \operatorname{senh} t \ , \end{cases}$$

$-2 \leq t \leq 1$.

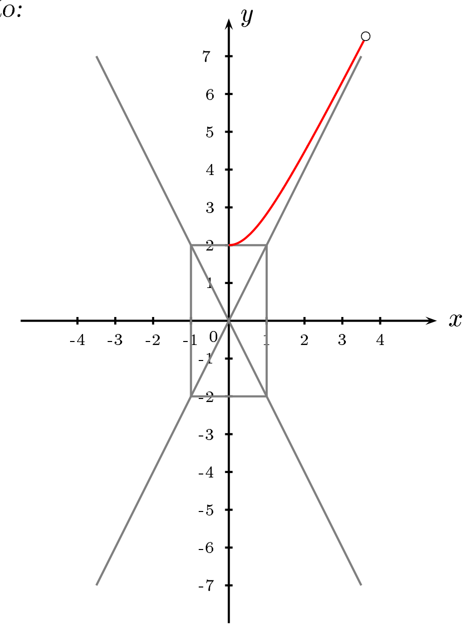
Solução:



Ex.6: faça o gráfico da hipérbole dada por

$$\begin{cases} x = \operatorname{senh} t \ , \\ y = 2 \cosh t \ , \end{cases} \quad 0 \leq t < 2.$$

Solução:



Note que no exemplo 6 o intervalo do parâmetro t é aberto em $t = 2$, o que é representado no gráfico por uma bola aberta.

Com isto, terminamos este capítulo. A seguir, estudaremos intersecções entre curvas no plano e como mudar da representação paramétrica para a algébrica e vice versa.

Leitura Complementar

A - Outras curvas

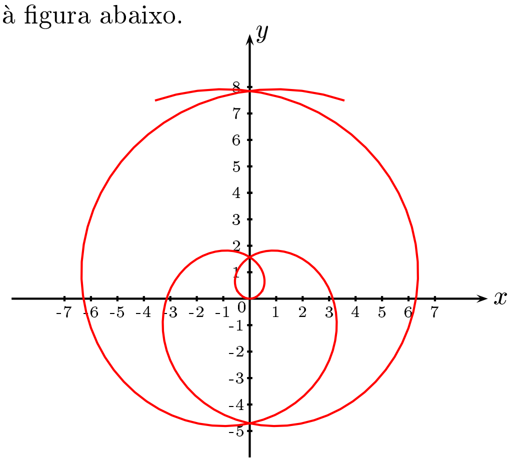
O uso de equações paramétricas torna possível escrever outras curvas cujas formas algébricas são muito complicadas. Algumas dessas curvas, como as que podem ser escritas como

$$\begin{cases} x = x_0 + x_1 t + x_2 t^2 + \cdots + x_n t^n \ , \\ y = y_0 + y_1 t + y_2 t^2 + \cdots + y_n t^n \ , \end{cases}$$

têm a forma de polinômios (às vezes, de polinômios girados ao redor de algum ponto). Essas geralmente são tratadas no curso de Cálculo. Outras curvas podem ser expressas em termos de senos e cossenos do parâmetro t. Veremos agora algumas dessas curvas em termos de exemplos.

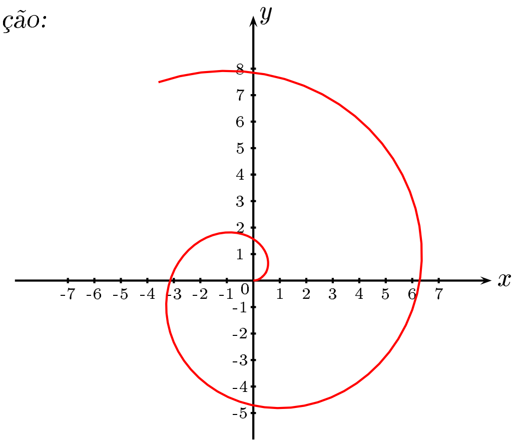
Ex.1: desenhe a curva dada pelas equações paramétricas $\begin{cases} x = t\cos t \ , \\ y = t \,\mathrm{sen}\, t \ . \end{cases}$

Solução: associando valores ao parâmetro t, chegamos à figura abaixo.



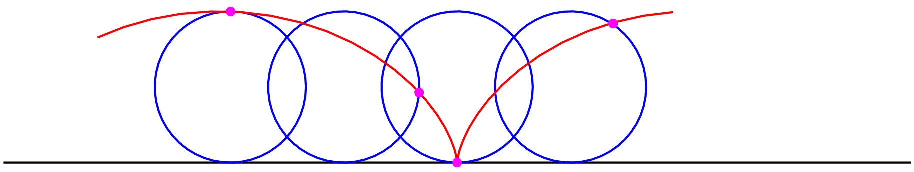
Ex.2: desenhe a curva dada pelas equações paramétricas $\begin{cases} x = t\cos t \ , \\ y = t \,\mathrm{sen}\, t \ , \end{cases}$ $t \geq 0$.

Solução:



Embora a figura do exemplo 1 acima não seja muito conhecida, se tomarmos somente $t \geq 0$ obtemos uma espiral, como a figura do exemplo 2.

Outra figura interessante é a *ciclóide*, que é o caminho seguido por um ponto que se encontra na borda de uma circunferência quando esta rola por um plano, como a trajetória de um prego preso à roda de um carro.



Ex.3: desenhe a curva dada pelas equações paramétricas $\begin{cases} x = \cos^3 t \ , \\ y = \operatorname{sen}^3 t \ . \end{cases}$

Solução: