3 - Intersecções entre curvas e mudanças de representação

3.1 - Intersecções entre curvas descritas por equações algébricas
3.2 - Intersecções entre curvas descritas por equações paramétricas
3.3 - Mudanças de representação

Neste capítulo estudaremos a intersecção entre curvas, isto é, a determinação do ponto ou pontos onde duas curvas se cruzam. Também estudaremos como passar da representação algébrica de uma curva para sua representação paramétrica e como passar da representação paramétrica para a representação algébrica.

3.1 - Intersecções entre curvas descritas por equações algébricas

Em diversas aplicações que vão desde a física até a economia, é importante a determinação do ponto, ou pontos, onde duas curvas se encontram. Nesta primeira sessão, estudaremos a determinação de pontos de interseç ao entre duas curvas descritas por equações algébricas.

A chave para a determinação de um ponto de intersecção entre duas curvas é que, neste, as coordenadas (x, y) das duas curvas são as mesmas. Isto será aplicado nos exemplos a seguir na determinação dos pontos de intersecção de algumas curvas.

3.3 - Mudanças de representação

Agora veremos como passar das representações algébricas de certas curvas para suas representações paramétricas e de suas representações paramétricas para as representações algébricas. Isto será feito para as curvas estudadas até agora.

a) Retas

Podemos estabelecer uma relação entre as equações paramétricas e a equação algébrica de uma reta da seguinte forma:

$$\begin{cases} x = x_0 + x_1 t \ , \\ y = y_0 + y_1 t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - x_0 = x_1 t \ , \\ y - y_0 = y_1 t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x-x_0}{x_1} = t \ , \\ \frac{y-y_0}{y_1} = t \ . \end{cases}$$

Igualando a variável t das duas equações, obtemos

$$t = t \Rightarrow \frac{y - y_0}{y_1} = \frac{x - x_0}{x_1} \Rightarrow y - y_0 = y_1 \left(\frac{x - x_0}{x_1} \right) \Rightarrow y - y_0 = \frac{y_1}{x_1}(x - x_0) \Rightarrow y = y_0 + \frac{y_1}{x_1}(x - x_0) \ ,$$

que é a equação de uma reta, $y = y_0 + m(x - x_0)$, onde $m = \frac{y_1}{x_1}$.

Ex.1: escreva a equação algébrica correspondente às equações paramétricas $\begin{cases} x = 1 + 2t \ , \\ y = 3 + 4t \ . \end{cases}$

Solução: primeiro, isolamos o parâmetro t nas duas equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \ , \\ y = 3 + 4t \ ; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 2t \ , \\ y - 3 = 4t \ ; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x-1}{2} = t \ , \\ \frac{y-3}{4} = t \ . \end{cases}$$

Depois, igualamos t a t:

$$t = t \Rightarrow \frac{y-3}{4} = \frac{x-1}{2} \Rightarrow y - 3 = 4\left(\frac{x-1}{2}\right) \Rightarrow y - 3 = \frac{4}{2}(x-1) \Rightarrow y - 3 = 2(x-1) \Rightarrow y = 3 + 2(x-1) \ .$$

Assim, obtivemos a equação algébrica correspondente.

Ex.2: escreva a equação algébrica correspondente às equações paramétricas $\begin{cases} x = 3t \ , \\ y = 2 - t \ . \end{cases}$

Solução: temos, isolando o parâmetro t,

$$\begin{cases} x = 3t \ , \\ y = 2 - t \ ; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3t \ , \\ y - 2 = -t \ ; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{3} = t \ , \\ \frac{y-2}{-1} = t \ ; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{3} = t \ , \\ -(y-2) = t \ . \end{cases}$$

Igualando t a t,

$$t = t \Rightarrow -(y-2) = \frac{x}{3} \Rightarrow y - 2 = -\frac{x}{3} \Rightarrow y = 2 - \frac{1}{3}x \ .$$

Também podemos passar de uma equação algébrica para equações paramétricas escolhendo uma parametrização para uma das variáveis e deduzindo a parametrização equivalente para a outra. A forma mais simples de fazermos isto é escolhendo $x = t$, de modo que temos, da equação algébrica,

$$y = y_0 + m(x - x_0) \Rightarrow y = y_0 + m(t - x_0) \Rightarrow y = y_0 + mt - mx_0 \Rightarrow y = (y_0 - mx_0) + mt \ ,$$

de modo que

$$\begin{cases} x = t \ , \\ y = (y_0 - mx_0) + mt \ . \end{cases}$$

Poderíamos ter esclhido, por exemplo, $x = x_0 + t$, de modo que temos

$$y = y_0 + m(x - x_0) \Rightarrow y = y_0 + m(x_0 + t - x_0) \Rightarrow y = y_0 + mt \ ,$$

de modo que

$$\begin{cases} x = x_0 + t \ , \\ y = y_0 + mt \ . \end{cases}$$

Como já foi dito antes, existem infinitas maneiras de parametrizar uma determinada reta.

Ex.3: escreva equações paramétricas equivalentes à equação algébrica $y = 2 + 3x$.

Solução: escolhendo $x = t$, temos $y = 2 + 3t$, de modo que temos

$$\begin{cases} x = t \ , \\ y = 2 + 3t \ . \end{cases}$$

Ex.4: escreva equações paramétricas equivalentes à equação algébrica $y = -1 + 2x$.

Solução: escolhendo $x = t$, temos $y = -1 + 2t$, de modo que temos

$$\begin{cases} x = t \ , \\ y = -1 + 2t \ . \end{cases}$$

b) Parábolas

Na sua forma mais geral,
$$\begin{cases} x = x_0 + x_1 t + x_2 t^2 \ , \\ y = y_0 + y_1 t + y_2 t^2 \ , \end{cases}$$
não é possível estabelecer uma conexão simples entre equações paramétricas e as respectivas equações algébricas, pois não podemos escrever as últimas em forma de polinômio. No entanto, para os casos em que o eixo de simetria de uma parábola é paralelo ao eixo x ou ao eixo y isto é bastante simples.

No caso do eixo de simetria paralelo ao eixo y, temos
$$\begin{cases} x = x_0 + x_1 t \ , \\ y = y_0 + y_2 t^2 \ . \end{cases}$$
Uma forma de se obter as equações algébricas é isolando o parâmetro t na primeira equação e substituinod na segunda:
$$x = x_0 + x_1 t \Rightarrow x - x_0 = x_1 t \Rightarrow \frac{x - x_0}{x_1} = t \ ,$$
$$y = y_0 + y_2 t^2 \Rightarrow y = y_0 + y_2 \left(\frac{x - x_0}{x_1} \right)^2 \Rightarrow y = y_0 + \frac{y_2}{x_1^2}(x - x_0)^2 \ .$$
No caso do eixo de simetria paralelo ao eixo x, temos
$$\begin{cases} x = x_0 + x_2 t^2 \ , \\ y = y_0 + y_1 t \ . \end{cases}$$
Isolamos t na segunda equação e o substituimos na primeira para obter as equações algébricas:
$$y = y_0 + y_1 t \Rightarrow y - y_0 = y_1 t \Rightarrow \frac{y - y_0}{y_1} = t \ ,$$
$$x = x_0 + x_2 t^2 \Rightarrow x = x_0 + x_2 \left(\frac{y - y_0}{y_1} \right)^2 \Rightarrow x = x_0 + \frac{x_2}{y_1^2}(y - y_0)^2 \ .$$

Ex.1: escreva a equação algébrica correspondente às equações paramétricas $\begin{cases} x = 1 + t \ , \\ y = 3 + 2t^2 \ . \end{cases}$

Solução: primeiro, isolamos o parâmetro t na primeira das equações paramétricas:
$$x = 1 + t \Rightarrow x - 1 = t \ .$$
Depois, substituimos o resultado na segunda equação:
$$y = 3 + 2t^2 \Rightarrow y = 3 + 2(x - 1)^2 \ .$$
Assim, obtivemos a equação algébrica correspondente.

Ex.2: escreva a equação algébrica correspondente às equações paramétricas $\begin{cases} x = 2 + 3t \ , \\ y = 2 - t^2 \ . \end{cases}$

Solução: temos, isolando o parâmetro t,
$$x = 2 + 3t \Rightarrow x - 2 = 3t \Rightarrow \frac{x - 2}{3} = t \ .$$
Substituindo na segunda equação,
$$y = 2 - t^2 \Rightarrow y = 2 - \left(\frac{x - 2}{3} \right)^2 \Rightarrow y = 2 - \frac{(x - 2)^2}{9} \Rightarrow y = 2 - \frac{1}{9}(x - 2)^2 \ .$$

Ex.3: escreva a equação algébrica correspondente às equações paramétricas $\begin{cases} x = 1 + 2t^2 \ , \\ y = 2 - 4t \ . \end{cases}$

Solução: temos, isolando o parâmetro t na segunda equação,

$$y = 2 - 4t \Rightarrow y - 2 = -4t \Rightarrow \frac{y-2}{-4} = t \Rightarrow -\frac{y-2}{4} = t \ .$$

Substituindo na segunda equação,

$$x = 1 + 2t^2 \Rightarrow x = 1 + \left(-\frac{y-2}{4}\right)^2 \Rightarrow x = 2 + 2\frac{(y-2)^2}{16} \Rightarrow x = 2 + \frac{2}{16}(y-2)^2 \Rightarrow x = 2 + \frac{1}{8}(y-2)^2 \ .$$

Também podemos passar de uma equação algébrica para equações paramétricas escolhendo uma parametrização para uma das variáveis e deduzindo a parametrização equivalente para a outra.

Para o caso de eixo de simetria paralelo ao eixo y, onde temos uma equação algébrica do tipo

$$y = y_0 + m(x - x_0)^2 \ ,$$

a forma mais simples de fazermos isto é escolhendo $x = x_0 + t$, de modo que temos $x - x_0 = t$ e a equação algébrica fica

$$y = y_0 + mt^2 \ .$$

Temos, então, as equações paramétricas

$$\begin{cases} x = x_0 + t \ , \\ y = y_0 + mt^2 \ . \end{cases}$$

Para o caso de eixo de simetria paralelo ao eixo x, quando a equação algébrica é dada por

$$x = x_0 + mt^2 \ ,$$

a forma mais simples é escolhendo $y = y_0 + t$, de modo que $y - y_0 = t$ e a equação algébrica fica

$$x = x_0 + x_1 t^2 \ .$$

Ficamos, então, com as equações paramétricas

$$\begin{cases} x = x_0 + mt^2 \ , \\ y = y_0 + t \ . \end{cases}$$

Ex.4: escreva equações paramétricas equivalentes à equação algébrica $y = 2 + 3(x-2)^2$.

Solução: escolhendo $x = 2 + t$, temos $x - 2 = t$, de modo que $y = 2 + 3t^2$. Temos, então, as equações paramétricas

$$\begin{cases} x = 2 + t \ , \\ y = 2 + 3t^2 \ . \end{cases}$$

Ex.5: escreva equações paramétricas equivalentes à equação algébrica $x = -1 + y^2$.

Solução: escolhendo $y = t$, temos $x = -1 + t^2$. Temos, então, as equações paramétricas

$$\begin{cases} x = -1 + t^2 \ , \\ y = t \ . \end{cases}$$

c) Circunferências

Podemos passar das equaç oes paramétricas

$$\begin{cases} x = x_0 + r\cos t \ , \\ y = y_0 + r\,\mathrm{sen}\, t \ , \end{cases}$$

para equações algébricas da seguinte forma:

$$x = x_0 + r\cos t \Rightarrow x - x_0 = r\cos t \quad , \quad y = y_0 + r\,\mathrm{sen}\, t \Rightarrow y - y_0 = r\,\mathrm{sen}\, t \ .$$

Tomando a soma dos quadrados das duas expressões, temos

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2\cos^2 t + r^2\,\mathrm{sen}^2 t \Rightarrow (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2(\cos^2 t + \mathrm{sen}^2 t) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2 \ ,$$

onde usamos a identidade trigonométrica $\cos^2 t + \mathrm{sen}^2 t = 1$. A equação obtida é a de uma circunferência de raio r centrada em (x_0, y_0).

Ex.1: escreva a equação algébrica equivalente às equações paramétricas $\left\{ \begin{array}{l} x = 2 + 3\cos t \ , \\ y = -1 + 3\,\mathrm{sen}\, t \ . \end{array} \right.$.

Solução: temos $x = 2 + 3\cos t \Rightarrow x - 2 = 3\cos t$ e $y = -1 + 3\,\mathrm{sen}\, t \Rightarrow y + 1 = 3\,\mathrm{sen}\, t$. Portanto, a equação algébrica fica

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 3^2 \Rightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = 9 \ .$$

Ex.2: escreva a equação algébrica equivalente às equações paramétricas $\left\{ \begin{array}{l} x = 2\cos t \ , \\ y = 2\,\mathrm{sen}\, t \ . \end{array} \right.$.

Solução: temos

$$x^2 + y^2 = 2^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4 \ .$$

O caminho inverso, isto é, a transformação de uma equação algébrica em equações paramétricas correspondentes, pode ser feito lendo as características da circunferência diretamente da equação algébrica. Isto é feito no exemplo a seguir.

Ex.3: escreva equações paramétricas equivalentes à equação algébrica $(x-2)^2 + (y-3)^3 = 4$.

Solução: esta é uma circunferência de raio 2 e centro em $(2, 3)$, que tem equações paramétricas

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 2 + 2\cos t \ , \\ y = 3 + 2\,\mathrm{sen}\, t \ . \end{array} \right.$$

d) Elispes

Podemos passar das equações paramétricas

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + a\cos t \ , \\ y = y_0 + b\,\mathrm{sen}\, t \ , \end{array} \right.$$

para equações algébricas de modo semelhante ao caso da circunferência:

$$x = x_0 + a\cos t \Rightarrow x - x_0 = a\cos t \Rightarrow \frac{x - x_0}{a} = \cos t \ ,$$
$$y = y_0 + b\,\mathrm{sen}\, t \Rightarrow y - y_0 = b\,\mathrm{sen}\, t \Rightarrow \frac{y - y_0}{b} = \mathrm{sen}\, t \ .$$

Tomando a soma dos quadrados das duas expressões, temos

$$\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y-y_0}{b}\right)^2 = \cos^2 t + \mathrm{sen}^2 t \Rightarrow \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \ ,$$

onde novamente usamos a identidade trigonométrica $\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$. A equação obtida é a de uma elipse de semi-eixos a e b centrada em (x_0, y_0).

Ex.1: escreva a equação algébrica equivalente às equações paramétricas $\begin{cases} x = 1 + 2\cos t \ , \\ y = -1 + 3\operatorname{sen} t \ . \end{cases}$.

Solução: temos

$$x = 1 + 2\cos t \Rightarrow x - 1 = 2\cos t \Rightarrow \frac{x-1}{2} = \cos t \ ,$$
$$y = -1 + 3\operatorname{sen} t \Rightarrow y + 1 = 3\operatorname{sen} t \Rightarrow \frac{y+1}{3} = \operatorname{sen} t \ .$$

Portanto, a equação algébrica fica

$$\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y+1}{3}\right)^2 = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1 \ .$$

Ex.2: escreva a equação algébrica equivalente às equações paramétricas $\begin{cases} x = 3\cos t \ , \\ y = \operatorname{sen} t \ . \end{cases}$.

Solução: temos $x = 3\cos t \Rightarrow \frac{x}{3} = \cos t$ e $y = \operatorname{sen} t$. Portanto, a equação algébrica fica

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 + y^2 = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1 \ .$$

O caminho inverso, isto é, a transformação de uma equação algébrica em equações paramétricas correspondentes, pode ser feito lendo as características da elipse diretamente da equação algébrica. Isto é feito no exemplo a seguir.

Ex.3: escreva equações paramétricas equivalentes à equação algébrica $\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y-3)^3}{4} = 1$.

Solução: esta é uma elipse de semi-eixo horizontal 4, semi-eixo vertical 2 e centro em $(2, 3)$, que tem equações paramétricas

$$\begin{cases} x = 2 + 4\cos t \ , \\ y = 3 + 2\operatorname{sen} t \ . \end{cases}$$

e) Hipérboles

Equações paramétricas para uma das metades de uma hipérbole cujo eixo de simetria é paralelo ao eixo y são dadas por

$$\begin{cases} x = x_0 + a\cosh t \ , \\ y = y_0 + b\operatorname{senh} t \ . \end{cases}$$

Estas podem ser transformadas em equações algébricas de modo semelhante ao caso da elipse:

$$x = x_0 + a\cosh t \Rightarrow x - x_0 = a\cosh t \Rightarrow \frac{x - x_0}{a} = \cosh t \ ,$$
$$y = y_0 + b\operatorname{senh} t \Rightarrow y - y_0 = b\operatorname{senh} t \Rightarrow \frac{y - y_0}{b} = \operatorname{senh} t \ .$$

Tomando a diferença dos quadrados da primeira para a segunda expressão, temos

$$\left(\frac{x - x_0}{a}\right)^2 - \left(\frac{y - y_0}{b}\right)^2 = \cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t \Rightarrow \frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \ ,$$

onde usamos a identidade $\cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1$. A equação obtida é a de uma elipse de semi-eixos a e b centrada em (x_0, y_0). Fazendo o mesmo com a outra metade da hipérbole, dada pelas equações paramétricas

$$\begin{cases} x = x_0 + a\cosh t \ , \\ y = y_0 + b\operatorname{senh} t \ , \end{cases}$$

obtemos

$$x = x_0 - a\cosh t \Rightarrow x - x_0 = -a\cosh t \Rightarrow \frac{x - x_0}{a} = -\cosh t\ ,$$
$$y = y_0 - b\,\mathrm{senh}\, t \Rightarrow y - y_0 = -b\,\mathrm{senh}\, t \Rightarrow \frac{y - y_0}{b} = -\,\mathrm{senh}\, t\ ,$$

de modo que

$$\left(\frac{x - x_0}{a}\right)^2 - \left(\frac{y - y_0}{b}\right)^2 = (-\cosh t)^2 - (\,\mathrm{senh}\, t)^2 \Rightarrow \frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = \cosh^2 t + \,\mathrm{senh}\,^2 t \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1\ .$$

Esta é a mesma equação obtida anteriormente.

De modo semelhante, para hipérboles cujos eixos de simetria são paralelos ao eixo x, temos as equações paramétricas

$$\begin{cases} x = x_0 + a\,\mathrm{senh}\, t\ , \\ y = y_0 + b\cosh t\ , \end{cases}$$

que podem ser transformadas em equações algébricas fazendo

$$x = x_0 + a\,\mathrm{senh}\, t \Rightarrow x - x_0 = a\,\mathrm{senh}\, t \Rightarrow \frac{x - x_0}{a} = \,\mathrm{senh}\, t\ ,$$
$$y = y_0 + b\cosh t \Rightarrow y - y_0 = b\cosh t \Rightarrow \frac{y - y_0}{b} = \cosh t\ .$$

Tomando a diferença dos quadrados da segunda para a primeira expressão, temos

$$\left(\frac{y - y_0}{b}\right)^2 - \left(\frac{x - x_0}{a}\right)^2 = \cosh^2 t - \,\mathrm{senh}\,^2 t \Rightarrow \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(x - x_0)^2}{a^2} = 1\ .$$

Fazendo o mesmo com a outra metade da hipérbole, dada pelas equações paramétricas

$$\begin{cases} x = x_0 - a\,\mathrm{senh}\, t\ , \\ y = y_0 - b\cosh t\ , \end{cases}$$

temos

$$x = x_0 - a\,\mathrm{senh}\, t \Rightarrow x - x_0 = -a\,\mathrm{senh}\, t \Rightarrow \frac{x - x_0}{a} = -\,\mathrm{senh}\, t\ ,$$
$$y = y_0 - b\cosh t \Rightarrow y - y_0 = -b\cosh t \Rightarrow \frac{y - y_0}{b} = -\cosh t\ ,$$

de modo que

$$\left(\frac{y - y_0}{b}\right)^2 - \left(\frac{x - x_0}{a}\right)^2 = (-\cosh t)^2 - (-\,\mathrm{senh}\, t)^2 \Rightarrow \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(x - x_0)^2}{a^2} = \cosh^2 t - \,\mathrm{senh}\,^2 t \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(x - x_0)^2}{a^2} = 1\ ,$$

o que reproduz a equação obtida anteriormente.

Vamos a alguns exemplos.

Ex.1: escreva a equação algébrica equivalente às equações paramétricas $\begin{cases} x = 1 + 2\cosh t\ , \\ y = -1 + 3\,\mathrm{senh}\, t\ . \end{cases}$

Solução: temos

$$x = 1 + 2\cosh t \Rightarrow x - 1 = 2\cosh t \Rightarrow \frac{x - 1}{2} = \cosh t\ ,$$
$$y = -1 + 3\,\mathrm{senh}\, t \Rightarrow y + 1 = 3\,\mathrm{senh}\, t \Rightarrow \frac{y + 1}{3} = \,\mathrm{senh}\, t\ .$$

Portanto, a equação algébrica fica

$$\left(\frac{x - 1}{2}\right)^2 - \left(\frac{y + 1}{3}\right)^2 = \cosh^2 t - \mathrm{senh}^2 \mathrm{t} \Rightarrow \frac{(\mathrm{x} - 1)^2}{4} - \frac{(\mathrm{y} + 1)^2}{9} = 1\ .$$

Ex.2: escreva a equação algébrica equivalente às equações paramétricas $\begin{cases} x = 3\,\mathrm{senh}\, t\ , \\ y = \cosh t\ . \end{cases}$.

Solução: temos $x = 3\,\mathrm{senh}\, t \Rightarrow \frac{x}{3} = \mathrm{senh}\, t$ e $y = \cosh t$. Portanto, a equação algébrica fica

$$y^2 - \left(\frac{x}{3}\right)^2 = \cosh^2 t - \mathrm{senh}^2 t \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{1} = 1\ .$$

A transformação de uma equação algébrica em equações paramétricas correspondentes pode ser feito lendo as características da hipérbole diretamente da equação algébrica. Isto é feito no exemplo a seguir.

Ex.3: escreva equações paramétricas equivalentes à equação algébrica $\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y-3)^3}{4} = 1$.

Solução: esta é uma hipérbole centrada em $(2,3)$ que tem equações paramétricas

$$\begin{cases} x = 2 + 4\cosh t\ , \\ y = 3 + 2\,\mathrm{senh}\, t\ . \end{cases}$$