Università degli Studi di Padova

Corso di Perfezionamento in Metodologia e Didattica della Matematica

Anno accademico 2005-2006

Corso di elementi di calcolo numerico

Metodi numerici per il calcolo degli zeri delle funzioni

Relatore
Prof. Marco Vianello

Candidato
Dott. Arsenio Stabile

Introduzione

Lo scopo di questo lavoro è quello di proporre un possibile percorso didattico per la trattazione del calcolo degli zeri delle funzioni reali di variabile reale continue in un intervallo, utilizzando i metodi numeri di bisezione, delle corde e di Newton (o delle tangenti). Lo strumento di calcolo utilizzato è il foglio elettronico, molto diffuso in ambito scolastico.

I destinatari di questo percorso sono gli studenti di una quarta classe di un istituto tecnico industriale. In tale fase del proprio curricolo infatti, essi dovrebbero già possedere i prerequisiti matematici ed informatici richiesti. Tale argomento è inoltre previsto dai normali programmi ministeriali.

I metodi di bisezione e delle corde possono essere già introdotti e affrontati successivamente allo studio dei limiti delle funzioni e del teorema di esistenza degli zeri delle funzioni continue mentre, per quanto riguarda il metodo delle tangenti, è ovviamente necessario attendere lo studio delle derivate delle funzioni.

I principali obiettivi che si intendono raggiungere sono i seguenti:

- Conoscere i metodi bisezione, delle corde e di Newton.
- Saper calcolare, in maniera approssimata e con la precisione voluta, gli zeri delle funzioni continue.
- Conoscere analogie e differenze fra i tre metodi.

Verranno innanzitutto affrontati metodi di bisezione, delle corde e successivamente quello delle tangenti, evidenziando di volta in volta la convergenza alla soluzione dell'equazione e la stima dell'errore commesso quando si calcola lo zero di una funzione con un metodo numerico.

In appendice, infine, verranno confrontati fra loro i risultati ottenuti con tutti e tre i metodi, in termini di precisione e di numero di iterazioni.

1. Il metodo di Bisezione

In questa prima parte verrà trattato l'approccio didattico al metodo di calcolo degli zeri delle funzioni continue detto di bisezione (o dicotomico). Dopo aver provveduto, in classe, alla spiegazione degli aspetti teorici di base (teorema degli zeri delle funzioni continue, metodo di Bisezione, ecc…) si sottopone agli studenti un esempio di equazione non lineare da risolvere in classe, come applicazione del metodo, attraverso l'uso della calcolatrice scientifica.

Successivamente si mostrerà agli studenti come è possibile implementare tale metodo con l'uso del personal computer e, in particolare con il foglio di calcolo.

1.1 Innanzitutto la teoria

Prima di introdurre il metodo di Bisezione, è opportuno far osservare agli studenti il fatto che non sempre un'equazione in un'incognita è risolvibile in modo esatto con i tradizionali metodi (equazioni algebriche di I e II grado, equazioni esponenziali e logaritmiche elementari, equazioni goniometriche, ecc…). In molte applicazioni della matematica, il modello risolvente di un dato problema può richiedere la soluzione di un'equazione che non è possibile o conveniente risolvere data la laboriosità dei calcoli, mediante passaggi algebrici elementari.

Quello che mi appresto a fare è non solo trasmettere agli studenti il metodo di bisezione per risolvere numericamente equazioni non lineari ma sottolineare l'importanza della stima dell'errore che si commette quando la soluzione reale viene sostituita da un valore approssimato.

Pongo all'attenzione degli studenti la seguente equazione esponenziale:

$$2^x + x - 3 = 0.$$

Essa può essere riscritta nella forma equivalente: $2^x = 3 - x$ che è a sua volta equivalente al sistema:

$$\begin{cases} y = 2^x \\ y = 3 - x \end{cases}$$

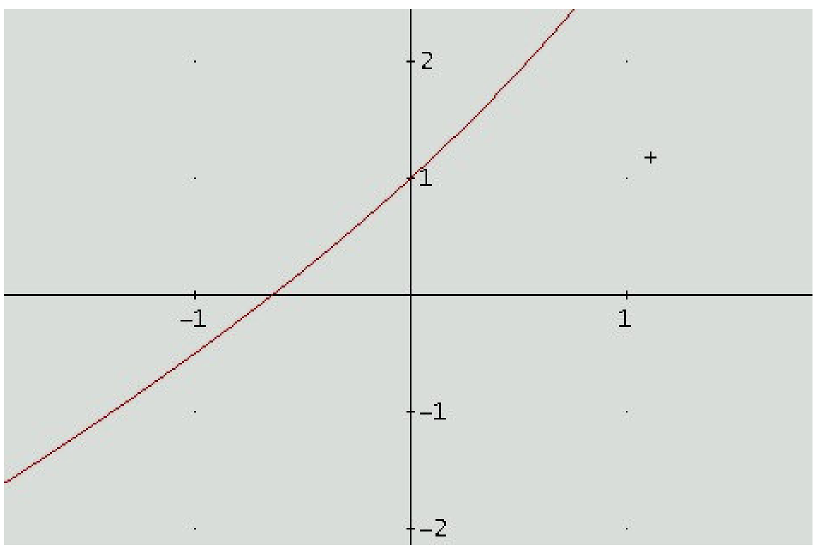
Da tale sistema si vede subito che, calcolare le soluzioni di tale equazione, è lo stesso che determinare il punto di intersezione della curva esponenziale di base 2 e della retta di equazione $y = 3 - x$.

Una volta osservato che è impossibile risolvere tale equazione con i metodi algebrici elementari normalmente studiati a scuola, ci si chiede se il personal computer o altri strumenti di calcolo possono venire in aiuto. Naturalmente la risposta è sì ma occorrono particolari strumenti matematici e il prezzo da pagare consiste nel fatto che questi non porteranno alla soluzione esatta ma solo ad un valore che *ci si avvicina*, cioè lo approssima.

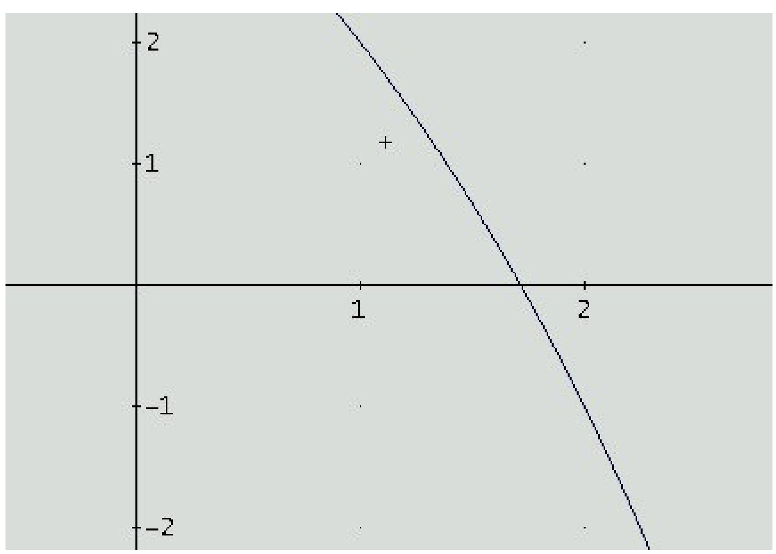
Ricordiamo l'enunciato del *teorema degli zeri delle funzioni continue*:

<u>Teorema</u>: Sia $y = f(x)$ una funzione reale di variabile reale definita e *continua* in un intervallo $[a,b] \subset R$. Se $f(a)$ ed $f(b)$ hanno segni opposti cioè $f(a) \cdot f(b) < 0$, allora esiste un punto $c \in \,]a,b[$ tale che $f(c) = 0$.

Dal punto di vista grafico, l'ipotesi $f(a) \cdot f(b) < 0$ sta a rappresentare la condizione che negli estremi dell'intervallo $[a,b]$ il grafico della funzione è situato da parti opposte rispetto all'asse delle *x*. Si verifica cioè una delle seguenti situazioni:



oppure



In entrambi i casi la funzione è continua nell'intervallo $[-1,0]$ e nell'intervallo $[1,2]$ rispettivamente. Per quanto riguarda la prima funzione, risulta $f(-1)<0$ e $f(0)>0$ mentre, per la seconda: $f(1)>0$ e $f(2)<0$. Appare evidente allora, che in entrambi gli intervalli, esiste un punto c in cui la funzione "attraversa" l'asse x, cioè $f(c)=0$.

Sottolineo il fatto che questo è un teorema di *esistenza*, cioè garantisce che sotto determinate ipotesi esiste certamente un punto in cui la funzione assume valore nullo ma non dice *nulla per quanto riguarda la sua posizione*. Tuttavia esso è alla base del funzionamento non solo del metodo di Bisezione ma anche di altri metodi che saranno affrontati più avanti.

Veniamo all'algoritmo. Si tratta di costruire una successioni di intervalli $[a_n,b_n]$ contenuti nell'intervallo $[a,b]$, di ampiezza via via minore e contenuti ognuno nel precedente, all'interno dei quali è contenuto il punto c tale che $f(c)=0$.

A partire dall'intervallo $[a,b]$, determiniamo il suo centro m_0:

$$m_0=\frac{a+b}{2}.$$

In tal modo si individuano all'interno dell'intervallo $[a,b]$ due sotto intervalli $[a,m_0]$ e $[m_0,b]$. Siccome, per il teorema degli zeri delle funzioni continue, lo zero della funzione è contenuto nell'intervallo nei cui estremi essa assume valori opposti in segno, sarà opportuno andare a valutare la funzione nel punto m_0. Se risulta $f(m_0)=0$ allora abbiamo trovato la soluzione, altrimenti si ripeterà il procedimento finora visto, sostituendo l'intervallo $[a,b]$ con l'intervallo $[a,m_0]$, se $f(a)\cdot f(m_0)<0$, l'intervallo $[m_0,b]$ altrimenti. Supposto che sia vera la prima ipotesi, si calcola il centro di tale intervallo:

$$m_1=\frac{a+m_0}{2}$$

e così via.

In questo modo si costruisce una successione di numeri reali m_0, m_1, $m_2,\ldots$ centri di altrettanti intervalli tutti contenuti in $[a,b]$, ognuno dei quali ha ampiezza pari alla metà di quella del precedente e all'interno dei quali si trova la soluzione della nostra equazione, come assicurato dal teorema degli zeri.

Una volta individuato un intervallo $[a_k, b_k]$ di ampiezza *sufficientemente piccola*, prenderemo come approssimazione della soluzione il punto $\gamma = \frac{a_k + b_k}{2}$ e cioè porremo:

$$c \simeq \frac{a_k + b_k}{2}.$$

Restano da stabilire un criterio per l'arresto dell'algoritmo, dal momento che così come è stato impostato, potrebbe proseguire all'infinito e la convergenza della successione alla soluzione dell'equazione assegnata, ossia:

$$\lim_{k \to \infty} m_k = c$$

L'errore assoluto commesso con l'approssimazione $c \simeq \gamma$ è dato da:

$$e = |c - \gamma|.$$

Dal momento che *c* e γ appartengono ad un intervallo del tipo $[a_k, b_k]$ risulta:

$$e = |c - \gamma| \leq \frac{b_k - a_k}{2}$$

e poiché $[a_k, b_k]$ è ottenuto da $[a, b]$ dividendo per due esattamente *k* volte l'ampiezza di ciascun intervallo, si ottiene:

$$\frac{b_k - a_k}{2} = \frac{b - a}{2^{k+1}}$$

per cui:

$$e \leq \frac{b - a}{2^{k+1}}.$$

Siccome la quantità al secondo membro della precedente disuguaglianza tende a zero quando $k \to \infty$, anche *e* tende a zero. Dunque la convergenza di questo algoritmo alla soluzione *c* dell'equazione è assicurata.

Per quanto riguarda il criterio per l'arresto delle iterazioni, esso si basa sulla precisione con la quale si richiede la soluzione. Infatti, controllando di volta in volta l'ampiezza dell'intervallo, data una tolleranza *t* arbitrariamente prefissata, il procedimento verrà arrestato nel momento in cui

$$\frac{b - a}{2^k} \leq t$$

cosicché l'errore commesso sarà minore della tolleranza.

Da quest'ultima disuguaglianza possiamo ricavare il numero minimo *k* di iterazioni per il raggiungimento della precisione *t* richiesta:

$$\frac{b - a}{2^k} \leq t \qquad \Rightarrow \qquad k \geq \log_2(b - a) - \log_2 t.$$

Da ciò si vede che essendo

$$\log_2 10 \simeq 3,32$$

il numero minimo di iterazioni per migliorare di una cifra decimale la precisione della soluzione trovata, sono necessarie almeno tre iterazioni. Questo fatto mostra che l'algoritmo di bisezione è piuttosto lento a convergere e ciò verrà messo in evidenza quando verrà confrontato con altri metodi.

1.2 Mettiamo in atto il metodo

Come già accennato in precedenza, a questo punto ritengo necessario, per acquisire familiarità con l'algoritmo, effettuare in classe dopo la spiegazione, alcuni esempi di applicazione con l'uso della calcolatrice scientifica. È opportuno che questo lavoro sia effettuato dalla classe, divisa in piccoli gruppi di 3 – 4 persone.

A ciascun gruppo viene assegnata una diversa equazione non lineare da risolvere numericamente. Quindi si chiede a ciascun gruppo, dopo aver stabilito a priori la tolleranza t desiderata, di riempire una tabella simile alla seguente:

n	a_n	b_n	$\frac{a_n+b_n}{2}$	$f(a)$	$f(b)$	$f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)$	$\lvert b_n-a_n \rvert$

Consideriamo il seguente esempio. Si vuole risolvere numericamente con il metodo di bisezione l'equazione non lineare:

$$2^x + x - 3 = 0$$

nell'intervallo $[0,2]$, con una precisione $t = 10^{-3}$, ossia con tre cifre decimali esatte.

Il numero minimo di iterazioni necessario per trovare una soluzione approssimata ti tale equazioni è dato da:

$$k = \log_2(b-a) - \log_2 t\,.$$

Nel nostro caso, dunque:

$$k = \log_2 2 - \log_2 10^{-3} = 1 + 3\log_2 10 \simeq 11,55\,.$$

Quindi per raggiungere la precisione voluta t ci aspettiamo un numero minimo di iterazioni pari a 12. Eseguendo le iterazioni si ottiene la seguente tabella:

n	a_n	b_n	$\frac{(a_n + b_n)}{2}$	$f(a_n)$	$f(b_n)$	$f\frac{(a_n + b_n)}{2}$	$\lvert b_n - a_n \rvert$
0	0,0000	3,0000	1,5000	-2,0000	8,0000	1,3284	3,0000

1	0,0000	1,5000	0,7500	-2,0000	1,3284	-0,5682	1,5000
2	0,7500	1,5000	1,1250	-0,5682	1,3284	0,3060	0,7500
3	0,7500	1,1250	0,9375	-0,5682	0,3060	-0,1473	0,3750
4	0,9375	1,1250	1,0313	-0,1473	0,3060	0,0750	0,1875
5	0,9375	1,0313	0,9844	-0,1473	0,0750	-0,0372	0,0938
6	0,9844	1,0313	1,0078	-0,0372	0,0750	0,0187	0,0469
7	0,9844	1,0078	0,9961	-0,0372	0,0187	-0,0093	0,0234
8	0,9961	1,0078	1,0020	-0,0093	0,0187	0,0047	0,0117
9	0,9961	1,0020	0,9990	-0,0093	0,0047	-0,0023	0,0059
10	0,9990	1,0020	1,0005	-0,0023	0,0047	0,0012	0,0029
11	0,9990	1,0005	0,9998	-0,0023	0,0012	-0,0006	0,0015
12	0,9998	1,0005	**1,0001**	-0,0006	0,0012	0,0003	**0,0007**

Da essa si osserva che la soluzione trovata, con tre cifre decimali esatte è ***c=1,0001*** e che coerentemente con la nostra previsione, il numero minimo di iterate che è stato necessario eseguire è 12.

1.3 Implementiamo l'algoritmo con Ms Excel.

Una volta acquisito il funzionamento del metodo di Bisezione con carta e penna, si passa alla fase i implementazione con il foglio elettronico. Qui di seguito si descriverà l'implementazione con la sintassi di MS Excel ma è ovvio che può essere utilizzato un qualunque altro programma analogo.

Ci proponiamo di risolvere la stessa equazione che abbiamo risolto in classe con carta, penna e calcolatrice:

$$2^x + x - 3 = 0$$

nell'intervallo iniziale $[0,3]$, con una tolleranza $t = 10^{-3}$.

Seguiamo questi passi:

1. Avviamo Ms Excel e creiamo un foglio di lavoro vuoto;
2. Nella prima riga introduciamo la prima riga della tabella nella pagina precedente, aggiungendo alla fine l'ulteriore voce: "*Tolleranza*". La cella alla sua destra conterrà l'accuratezza desiderata per la soluzione *t* che possiamo introdurre nella forma "**=10^-3**".
3. Passiamo alla seconda riga, nella quale verranno introdotti i valori iniziali. Il numero dell'iterazione da introdurre è "*0*", mentre gli estremi iniziali dell'intervallo sono rispettivamente "*0*" per l'estremo *a* e "*3*" per l'estremo *b*.
4. Nella cella successiva calcoliamo la somma divisa per due dei due valori iniziali di *a* e *b*. La formula da inserire è "**=(B2+C2)/2**";

5. Nelle tre celle successive vanno calcolate le immagini dei valori inseriti nelle tre celle a sinistra. È sufficiente inserire una formula che calcoli il primo ($f(a)$). Successivamente, copiando questa formula nelle due celle a destra, C2 e D2, verranno calcolati i due valori $f(b)$ e $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$. Introduciamo la formula per il calcolo di $f(a)$: "**=2^B2+B2-3**".
6. Nell'ultima cella della riga, calcoliamo la differenza, in valore assoluto, fra i valori attuali degli estremi *a* e *b*. La formula da introdurre è: "**=ass(B2-C2)**".
7. Passiamo alla terza riga. Nella colonna *A*, con la formula "**=A2+1**", facciamo in modo che il numero delle iterazioni venga aggiornato a mano a mano che copiamo tale riga verso il basso.
8. Nella cella B3 dovrà esser mostrato il valore contenuto in B2 se il prodotto $E2 \cdot G2$ è negativo, il valore $\frac{B2+C2}{2}$ altrimenti. Dunque inseriremo in B3 la formula: "**=SE(E2*G2<0;B2;(B2+C2)/2)**"
9. Nella cella C3 dovrà esser mostrato il valore $\frac{B2+C2}{2}$ se il prodotto $F2 \cdot G2$ è positivo, il valore contenuto in C2 altrimenti. Dunque inseriremo in C3 la formula: "**=SE(F2*G2>0;(B2+C2)/2;C2)**".
10. Nelle celle da D3 in poi è sufficiente copiare le formule contenute nelle celle soprastanti.

Il foglio è pronto ma occorre ancora un segnale che ci informi che l'approssimazione trovata soddisfa la tolleranza indicata nella cella J1. Possiamo usare, a questo scopo, la funzione "**Formattazione condizionale…**" presente nel menù "**Formato**" di Ms Excel. Procediamo così:

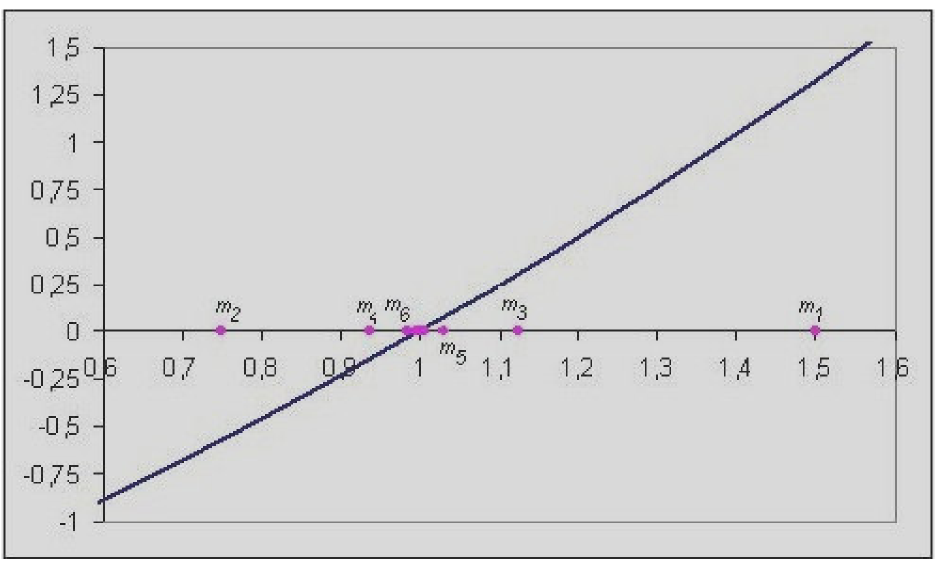
1. Selezioniamo le due intere colonne B e C cliccando sulle lettere B e C in testa alle colonne stesse e quindi sulla voce "**Formattazione condizionale…**" presente nel menù "**Formato**".
2. Nella finestra che si apre, selezioniamo la voce "**La formula è…**", presente nel menù a tendina che si trova a sinistra.
3. Nel campo bianco a destra di tale menù, inseriamo la formula:"**=ASS(B3-C3)<J1**". Tale formula confronta il l'ampiezza nell'attuale iterazione dell'intervallo, con la tolleranza inserita nella cella J1.

4. L’azione da eseguire nel caso in cui il test è positivo è quella di scrivere in rosso, da quell’istante in poi i valori di tale colonna. Per farlo, basta fare click sul pulsante “**Formato…**” e selezionare il rosso nella finestra che segue.
5. Dopo aver più volte selezionato il pulsante “**OK**” vengono chiuse tutte le finestre e il foglio è pronto.

Ora possiamo finalmente risolvere l’equazione assegnata selezionando tutta la terza riga della tabella e copiarla in basso utilizzando il quadratino di riempimento situato in basso a destra del rettangolo di selezione. Procedendo lentamente, una riga per volta, si osserva che i valori presenti nelle colonne “a_n” e “b_n” variano, come previsto.

Alla dodicesima iterazione, si nota che i valori riportati in tali colonne vengono scritti in rosso. In quel momento viene raggiunta la precisione richiesta e nella colonna D si legge il valore approssimante.

Il seguente grafico mostra come i punti m_k della successione, costruiti con il metodo di bisezione, si “*avvicinino*” sempre più al punto di intersezione della curva $y = 2^x + x - 3$ con l’asse *x*, al crescere di *k*.



Con carta, penna e calcolatrice l’applicazione del metodo di bisezione può risultare un lavoro lento e noioso. Il foglio elettronico, invece, ha l’indubbio vantaggio di rendere tale compito molto più semplice e veloce.

Allo scopo di mostrare agli studenti che il numero di iterazioni aumenta al crescere della precisione richiesta, si può far variare il valore inserito in J2 con il nuovo: “**=10^-4**”.

La prima cosa che si osserva è che i valori che prima erano scritti in rosso diventano neri, come ci si potrebbe aspettare, non essendo più soddisfatta la condizione

$$|b_n - a_n| < t\ .$$

A questo punto ci si chiede: "*Quante nuove iterazioni saranno necessarie per raggiungere la precisione richiesta, avendo diminuito di una cifra l'esponente di 10?*".

Ricopiando allora in basso l'ultima riga della tabella gli studenti sono portati ad osservare che occorrono tre ulteriori iterazioni e questo da' conferma del fatto precedentemente anticipato, che il guadagno, in termini di cifre decimali esatte, all'aumentare delle iterazioni è di *circa* tre cifre.

Tale valore da' un'indicazione sulla "*velocità*" con la quale il metodo giunge alla soluzione approssimata. Esso inoltre, una volta introdotti i *metodi delle corde* e di *Newton*, verrà confrontato con gli analoghi di tali metodi, allo scopo di osservare che la successione costruita con il metodo di Bisezione è, delle tre, la più lenta a convergere verso la soluzione.

2. Il metodo delle corde

In questo capitolo verrà trattato il metodo delle corde per la soluzione numerica delle equazioni non lineari. Come nel caso precedente, dopo averlo trattato dal punto di vista teorico, sarà utilizzato per risolvere in classe, con carta e penna, un'equazione e quindi, infine, implementato con l'uso del foglio di lavoro.

Dei tre metodi trattati in questo lavoro, quello delle corde rappresenta il miglior compromesso fra ipotesi richieste e velocità di convergenza. Questo fatto verrà evidenziato nell'appendice A, ove verrà confrontato con gli altri due metodi.

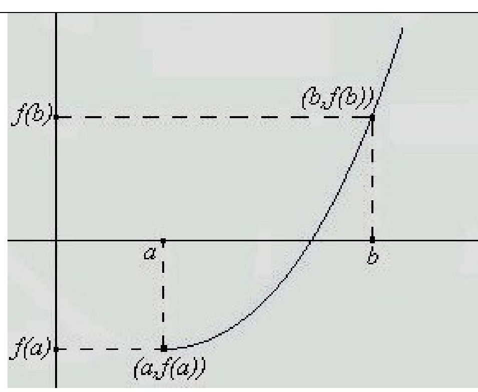
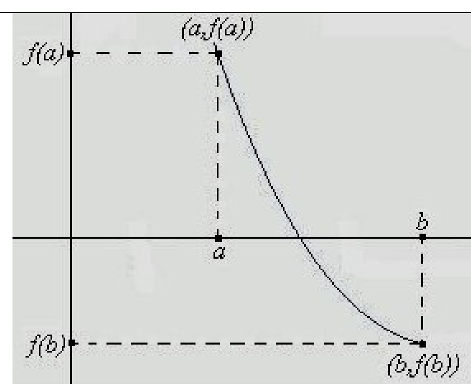
2.1 La teoria

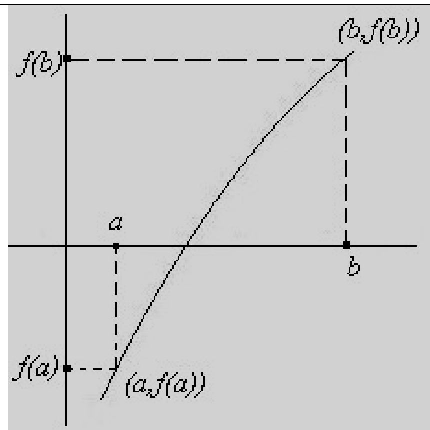
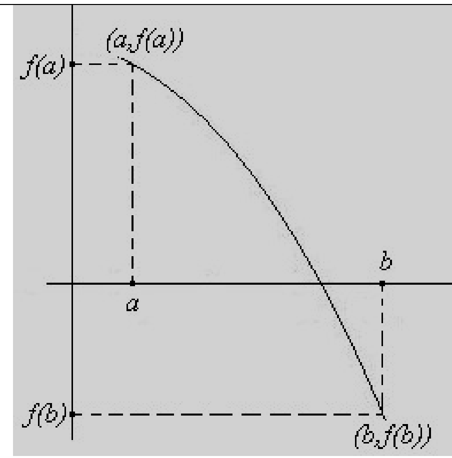
L'idea alla base di questo metodo numerico, consiste nel costruire una successione di punti $\{x_k\}$ convergente alla soluzione c dell'equazione $f(x)=0$. Ciascun punto della successione sarà individuato dall'intersezione di una retta con l'asse delle x, ottenuta congiungendo punti del grafico della funzione $y=f(x)$ opportunamente scelti.

Le ipotesi richieste per la convergenza del metodo sono:

1. $y=f(x)$ sia continua insieme con le sue derivate prima e seconda nell'intervallo $[a,b]$ e che $f''(x)\neq 0$ in tale intervallo;
2. l'intervallo $[a,b]$ non contenga più di una soluzione dell'equazione da risolvere;
3. La funzione assuma valori di segno opposti agli estremi di dell'intervallo $[a,b]$.

In base ai segni della funzione e della sua derivata seconda negli estremi dell'intervallo $[a,b]$ si possono presentare 4 distinti casi, qui di seguito rappresentati, in cui le funzioni in esame sono anche monotone benché questa ipotesi non sia necessariamente verificata..

1°Caso $f(a)<0$ $f(b)>0$ $f''(a)>0$ $f''(b)>0$		**2°Caso** $f(a)>0$ $f(b)<0$ $f''(a)>0$ $f''(b)>0$	

3° Caso $f(a)<0$ $f(b)>0$ $f''(a)<0$ $f''(b)<0$		**4° Caso** $f(a)>0$ $f(b)<0$ $f''(a)<0$ $f''(b)<0$	

Nel 1° e nel 4° caso la successione è crescente, mentre nel 2° e nel 3° caso è decrescente. Per fissare le idee supponiamo di trovarci nel 2° caso, in tutti gli altri, il discorso è analogo e può essere sviluppato, come esercizio, dagli studenti.

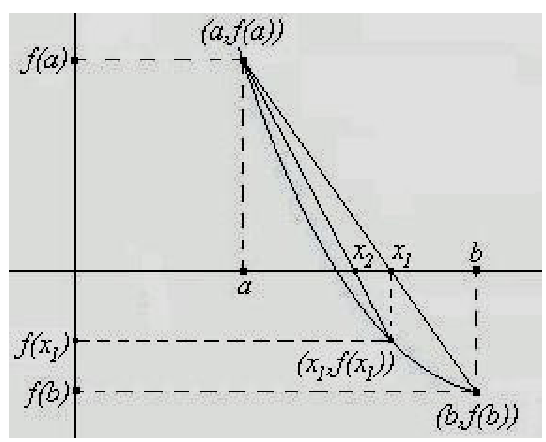
Costruiamo la successione approssimante $\{x_k\}$ procedendo così:

1. Valutiamo la funzione sia in *a* che in *b,* ottenendo i punti sul grafico: $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$;
2. Consideriamo la retta passante per tali punti, la cui equazione è: $\dfrac{y-f(b)}{f(a)-f(b)}=\dfrac{x-b}{a-b}$;
3. Poiché $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ si trovano, per ipotesi, da parti opposte rispetto all'asse *x* tale retta interseca l'asse *x* in un punto, che indichiamo con x_1, soluzione del sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{y-f(b)}{f(a)-f(b)}=\dfrac{x-b}{a-b} \\ y=0 \end{cases}$$

e cioè, posto $x_0=b$:

$$x_1 = x_0 - \frac{a-x_0}{f(a)-f(x_0)} f(x_0)$$



4. In modo analogo, ripetiamo quanto fatto finora, considerando la retta passante per $(a, f(a))$ e $(x_1, f(x_1))$. Si ricava:

$$x_2 = x_1 - \frac{a-x_1}{f(a)-f(x_1)} f(x_1)$$

5. In questo modo si ottiene la formula iterativa:

$$\boxed{x_n = x_{n-1} - \frac{a - x_{n-1}}{f(a) - f(x_{n-1})} f(x_{n-1})}.$$

Questo metodo, come è possibile dimostrare, converge alla soluzione c dell'equazione $f(x) = 0$. Infatti lo schema è quello del metodo dell'"*iterazione funzionale*", cui si accennerà più avanti, nel capitolo dedicato al metodo *iterativo di Newton*:

$$x_n = g(x_{n-1})$$

e tale metodo è convergente, sotto determinate ipotesi per la funzione

$$g(x) = x - \frac{a - x}{f(a) - f(x)} f(x),$$

al punto fisso della stessa:

$$\bar{x} = g(\bar{x}).$$

Occorre ora fissare un criterio di arresto per l'algoritmo, affinché non vada in "loop". Fissata una costante t arbitrariamente piccola, l'algoritmo verrà interrotto quando la differenza in modulo fra due distinte approssimazioni consecutive della soluzione è minore di t:

$$|x_k - x_{k-1}| < t.$$

Questa condizione presenta, in generale, il limite per il quale l'approssimazione trovata può non essere "*molto vicina*" alla soluzione. In tal caso, è opportuno interrompere il ciclo iterativo dopo un prefissato numero di iterazioni. Questo test, inoltre, è valido in generale, per un qualunque metodo iterativo riconducibile all'iterazione funzionale.

2.2 Mettiamo in atto il metodo

Come per il metodo di bisezione, è opportuno prendere confidenza con il metodo delle corde, facendo svolgere con carta, penna e calcolatrice un esempio concreto.

Consideriamo dunque l'equazione non lineare:

$$senx + 1 = x^2$$

e cerchiamo di risolverla con il metodo delle corde.

Dopo aver riscritto l'equazione nella forma:

$$senx + 1 - x^2 = 0$$

si procede alla compilazione di una tabella analoga alla seguente:

n	$\boldsymbol{x_n}$	$f(x_n)$	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$

con intervallo di partenza $[-2,0]$ e tolleranza $t=10^{-4}$. Dopo 9 iterazioni si giunge ad una tabella del tutto simile a questa:

n	X_n	$f(X_n)$	$\|X_n-X_{n-1}\|$
0	-2,000000000	-3,909297427	
1	0,000000000	1,000000000	2,000000000
2	-0,407390269	0,437818634	0,407390269
3	-0,567789533	0,139845308	0,160399264
4	-0,617253809	0,040199828	0,049464276
5	-0,631328046	0,011207563	0,014074237
6	-0,635240674	0,003098030	0,003912628
7	-0,636321358	0,000854345	0,001080684
8	-0,636619314	0,000235449	0,000297956
9	**-0,636701423**	0,000064876	**0,000082109**

La soluzione approssimata trovata è: *c=-0,6367*.

È il caso allora di chiedersi: "*quale sarebbe stato il numero minimo, k, di iterazioni necessarie per risolvere la stessa equazione, a parità di tolleranza t e a partire dallo stesso intervallo iniziale, se avessimo utilizzato il metodo di bisezione?*".

Con semplici calcoli, si ottiene:

$$k=\log_2(b-a)-\log_2 t$$

$$\Updownarrow$$

$$k=\log_2(0+2)+\log_2 10^4$$

$$\Updownarrow$$

$$k=14,2.$$

Dunque con il metodo di bisezione occorrerebbero almeno 15 iterazioni, contro le 9 iterazioni del metodo delle corde. Questo fatto costituisce un primo confronto, in classe, fra i due metodi e può congetturare che il metodo delle corde è più rapido a convergere rispetto a quello di bisezione.

2.3 Implementiamo il metodo

Passiamo ora alla fase di implementazione del metodo con il foglio elettronico. L'equazione da risolvere è la stessa del precedente paragrafo ossia:

$$senx+1-x^2=0$$

con una tolleranza $t=10^{-4}$ e intervallo iniziale $[-2,0]$. Procediamo così:

1. Avviamo Ms Excel e creiamo un foglio di lavoro vuoto;

2. Nella riga riportiamo fedelmente la prima riga di intestazione della tabella del precedente paragrafo, aggiungendo nelle ultime due caselle le ulteriori: "*tolleranza*" e il valore numerico della tolleranza, nel nostro caso "10^{-4}";
3. Seconda riga: nella prima cella inseriamo il numero dell'iterazione cioè: "**0**", nella seconda, introduciamo l'estremo a dell'intervallo iniziale: "**-2**", nella terza cella calcoliamo $f(a)$: "**=SEN(B2)+1-B2^2**";
4. Terza riga: nella prima cella incrementiamo il numero dell'iterazione: "**=A2+1**". Nella seconda cella introduciamo l'estremo b dell'intervallo iniziale: "**0**", nella terza cella ricopiamo il valore della cella superiore, in modo da calcolare $f(b)$, nella quarta cella calcoliamo il test di stop: "**=ASS(B3-B2)**" e, nella successiva valutiamolo "**=SE(D2<F1;"SI";"NO")**";
5. Quarta riga: nella prima cella copiamo la cella superiore, nella seconda applichiamo il metodo iterativo per calcolare x_n: "**=B3-(B2-B3)/(C2-C3)*C3**", nella terza cella calcoliamo $f(x_n)$, copiando in essa la cella superiore, e altrettanto facciamo nelle due successive celle.

Trascinando in basso l'ultima riga, fino a quando nell'ultima colonna non compare la scritta "**SI**", l'algoritmo parte e converge alla soluzione dell'equazione.

3. Il metodo di Newton (o delle tangenti)

In questo capitolo verrà trattato il metodo di Newton per il calcolo degli zeri delle funzioni continue. Lo schema sarà ancora quello finora seguito: si esporrà la teoria (metodo di Newton, errore commesso, convergenza dell'algoritmo), si implementerà il metodo con il foglio elettronico. Infine si confronteranno i risultati ottenuti con quelli trovati con i metodi di bisezione e delle corde, allo scopo di osservare che a parità di precisione, quest'ultimo metodo è senz'altro il più rapido a convergere verso la soluzione.

3.1 La teoria

Data una equazione non lineare $f(x)=0$, l'idea alla base di questo metodo è quella di costruire, partendo da un valore x_0 iniziale, una successione di numeri reali convergente al punto c tale che:

$$f(c)=0.$$

L'ipotesi che si fa in questo caso è che la funzione $y=f(x)$ sia derivabile in ogni punto del suo dominio $D \subseteq R$ e questo implica l'esistenza della retta tangente alla curva che rappresenta graficamente la funzione sul piano *XY*, in ogni suo punto.

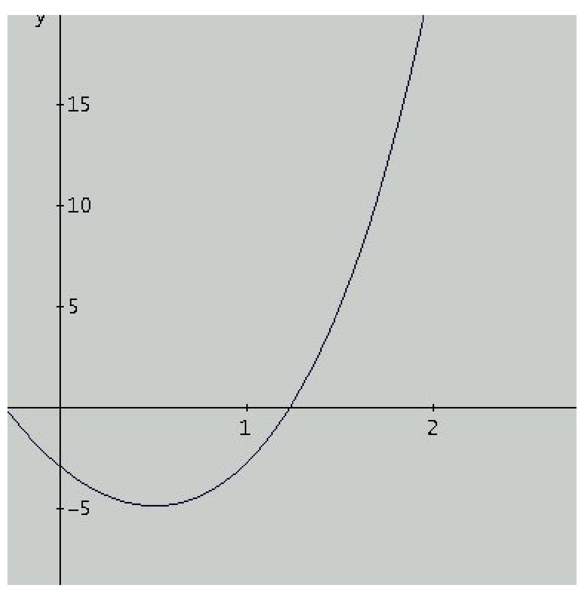
Ricordo che, in generale, se $x_0 \in D$, la derivata prima della funzione $y=f(x)$, indicata con $y'=f'(x)$, valutata in x_0, rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente alla curva nel punto x_0:

$$m=f'(x_0).$$

Quindi l'equazione di tale retta è:

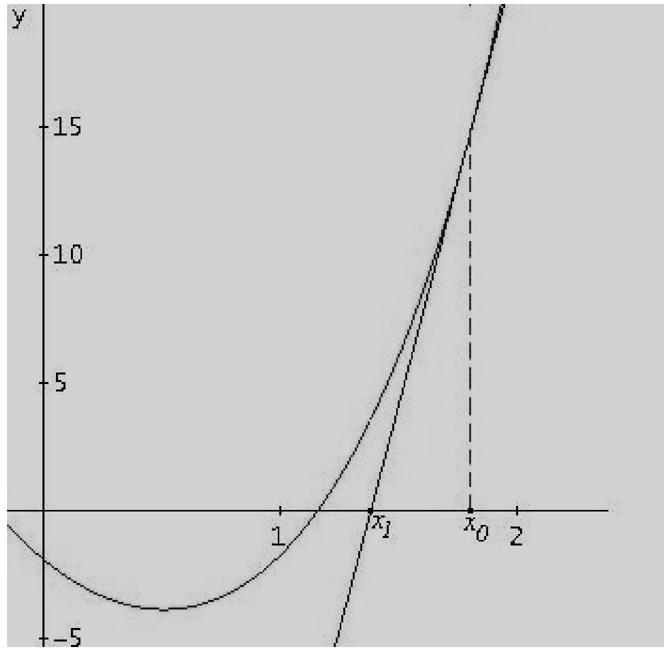
$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0).$$

Supponiamo che il grafico della funzione di cui stiamo calcolando lo zero in un intervallo $[a,b]$ (in questo caso $[1,2]$) sia come quello rappresentato a fianco.



Costruiamo una successione di punti x_0, x_1, x_2, …, x_k, il cui limite sia punto di intersezione (c) della curva con l'asse x, con il seguente procedimento:

1. Consideriamo un punto iniziale $x_0 \in D$ arbitrario e calcoliamo $f(x_0)$ ottenendo così il punto sulla curva di coordinate $(x_0, f(x_0))$.



2. Tracciamo ora per tale punto la retta tangente alla curva. Tale retta interseca l'asse delle x in un punto che denotiamo con x_1. La posizione di tale punto si ottiene risolvendo il sistema: $\begin{cases} y - f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0) \\ y = 0 \end{cases}$ ottenendo $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ che è più "*vicino*" alla soluzione c dell'equazione $f(x) = 0$.
3. A partire dal punto $(x_1, f(x_1))$ così trovato, ripetiamo i punti 1 e 2, determinando un altro punto $(x_2, f(x_2))$ la cui ascissa approssima ancora meglio c.
4. Al k-esimo passo, si troverà un punto $(x_k, f(x_k))$ tale che:

$$\boxed{x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}}.$$

Tale schema evidenzia il fatto che della funzione di cui si vuol calcolare lo zero, è necessario calcolare innanzitutto la sua derivata prima.

È possibile dimostrare che la successione $\{x_k\}$ converge alla soluzione c.

Il metodo di Newton rientra in una più ampia categoria di metodi numerici, nota con il nome di "*Iterazione funzionale*". Si tratta, data una funzione $y = g(x)$ di cui si vuole trovare uno zero, di costruire una successione di punti $\{x_k\}$ il cui limite sia proprio lo zero c. La costruzione di tali punti segue il seguente schema:

$$x_k = g(x_{k-1}).$$

Si assegna, dunque, un valore iniziale arbitrario x_0, quindi si calcolano poi $x_1 = g(x_0)$, $x_2 = g(x_1)$, ecc…

Si dimostra che la successione così costruita ha come limite il punto fisso della funzione $y = g(x)$.

Osserviamo ora che calcolare il punto fisso di una funzione $y = g(x)$ è equivalente a calcolare la soluzione di un'equazione del tipo $F(x) = 0$. Infatti se $\bar{x}$ è un punto fisso per $y = g(x)$, risulta:

$$\bar{x} = g(\bar{x}) \qquad \Leftrightarrow \qquad g(\bar{x}) - \bar{x} = 0$$

e quindi $\bar{x}$ è uno zero della funzione $F(x) = g(x) - x$. Viceversa, l'equazione $F(x) = 0$ è equivalente a:

$$x = x + F(x)$$

e quindi la sua soluzione $\bar{x}$, punto fisso della funzione $y = x + F(x)$è uno zero della funzione $y = F(x)$.

<u>Teorema (convergenza del metodo dell'iterazione funzionale).</u>

Sia $x_{i+1} = g(x_i)$ la formula iterativa che definisce l'algoritmo e $\bar{x}$ un punto fisso della funzione $y = g(x)$. Supponiamo che $g'(x)$ sia *continua* in un intorno $[\bar{x} - r, \bar{x} + r]$ nel quale si abbia anche $|g'(x)| < 1$, x_0 appartenga all'intorno $[\bar{x} - r, \bar{x} + r]$ di $\bar{x}$. Allora risulta: $\bar{x} = \lim_{i \to \infty} g(x_i)$, cioè la successione $\{x_k\}$ generata dalla formula iterativa converge al punto fisso $\bar{x}$.

Questo teorema, applicato alla formula iterativa che definisce il metodo di Newton, assicura che sotto determinate ipotesi per la funzione $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, non semplici da verificare, la convergenza della successione $x_{i+1} = g(x_i)$ al punto fisso di $y = g(x)$.

Interpretando graficamente il metodo, si osserva che la successione generata dall'algoritmo è convergente se è crescente o decrescente e, intuitivamente, questo si verifica se la funzione è continua nell'intervallo $[x_0, c]$ (o $[c, x_0]$) e il suo grafico si trova costantemente nel semipiano delle *y* positive o negative e concavità è costante rispetto all'asse *y* stesso. La scelta del punto iniziale x_0 della successione $\{x_k\}$ deve essere fatta, pertanto in modo che esso sia *sufficientemente vicino* alla soluzione.

Per quanto riguarda il test d'arresto, come nel caso del metodo delle corde, l'algoritmo verrà interrotto quando la differenza in modulo fra due distinte approssimazioni consecutive della soluzione è minore di una *tolleranza t* precedentemente fissata:

$$|x_k - x_{k-1}| < t\ .$$

Naturalmente, è opportuno interrompere il ciclo iterativo dopo un certo numero, prefissato, di iterazioni.

3.2 Mettiamo in atto il metodo

Come in precedenza, per prendere confidenza con il metodo di Newton, ritengo opportuno che, dopo la spiegazione teorica si passi ad un'applicazione del metodo con carta, penna e calcolatrice. Si assegna da compilare una tabella come la seguente:

n	Xn	F(Xn)	f'(Xn)	|Xn-Xn-1|

dove *f(Xn) e f'(Xn)* rappresentano i valori della funzione e della sua derivata prima in *Xn*.

Un esempio che si potrebbe svolgere in classe potrebbe essere il seguente:

$$x - \cos x = 0$$

con punto iniziale $x_0 = 0$, con una precisione richiesta di 5 cifre decimali esatte.

Eseguendo le iterazioni si ottiene la seguente tabella:

n	X_n	$F(X_n)$	$f'(X_n)$	$\|X_n-X_{n-1}\|$
0	1,000000000	0,459697694	1,841470985	0,000000000
1	0,750363868	0,018923074	1,681904953	0,249636132
2	0,739112891	0,000046456	1,673632544	0,011250977
3	0,739085133	0,000000000	1,673612029	0,000027758
4	**0,739085133**	0,000000000	1,673612029	**0,000000000**

Da tale tabella si osserva che la soluzione approssimata è $c = 0,739085133$ e la precisione ottenuta, dopo sole 4 iterazioni, è addirittura maggiore rispetto a quella richiesta.

A questo punto, si può già far notare agli studenti come il metodo di Newton sia più rapido a convergere rispetto a quello di bisezione, in termini di iterazioni da effettuare, a parità di precisione. Se infatti l'intervallo di partenza del metodo di bisezione è $[0,1]$, il numero minimo *k* di iterazioni necessarie perché esso converga con una tolleranza $t = 10^{-5}$ è:

$$k = \log_2(-1+2) - \log_2 10^{-5} \simeq 17\ .$$

3.3 Implementiamo l'algoritmo

Vediamo come è possibile implementare in un foglio di calcolo l'algoritmo finora presentato. Allo scopo di fare anche un confronto con il metodo di bisezione trattato in precedenza, l'equazione da risolvere sarà la stessa già risolta precedentemente con tale metodo:

$$2^x + x - 3 = 0$$

con la medesima precisione: $t = 10^{-5}$ e punto iniziale $x_0 = 1{,}5$.

1. Avviamo Ms Excel con un foglio di lavoro vuoto.
2. A partire dalla cella A1, introduciamo la riga di intestazione della tabella mostrata nella pagina seguente , aggiungendo in coda: "**Tolleranza**". Nella cella subito a destra (G1) inseriremo il valore della tolleranza *t*, "**=10^-5**".
3. Nella cella A2 introduciamo "***1,5***" e in B2 il punto iniziale (x_0) della successione: "**-1**". Nella cella C2 calcoliamo l'immagine secondo la funzione: "**=2^B2+B2-3**", mentre nella cella C2 calcoliamo l'immagine di x_0 secondo la derivata della funzione: "**=2^B2*log(2;2,7182818)+1**".
4. In A3: "**=A2+1**", in modo che ad ogni iterazione, il numero rappresentato sia incrementato di una unità.
5. In B3 calcoliamo il valore successivo della successione: "**=B2-C2/D2**".
6. In C3 e D3 ricopiamo semplicemente i valori contenuti nelle celle superiori in modo che vengano automaticamente aggiornati i riferimenti alle celle.
7. In E3 calcoliamo la differenza in modulo fra due distinte approssimazioni: "**=ass(B3-B2)**";
8. In F3 introduciamo il controllo della precisione raggiunta: "**=SE(E3<G1;"SI";"NO")**".

Il foglio di lavoro è adesso pronto e, per attivarlo, è sufficiente selezionare l'ultima riga e ricopiarla in basso finché nell'ultima colonna non appare la scritta "SI".

Dopo aver eseguito tutte le iterazioni la tabella ottenuta sarà la seguente:

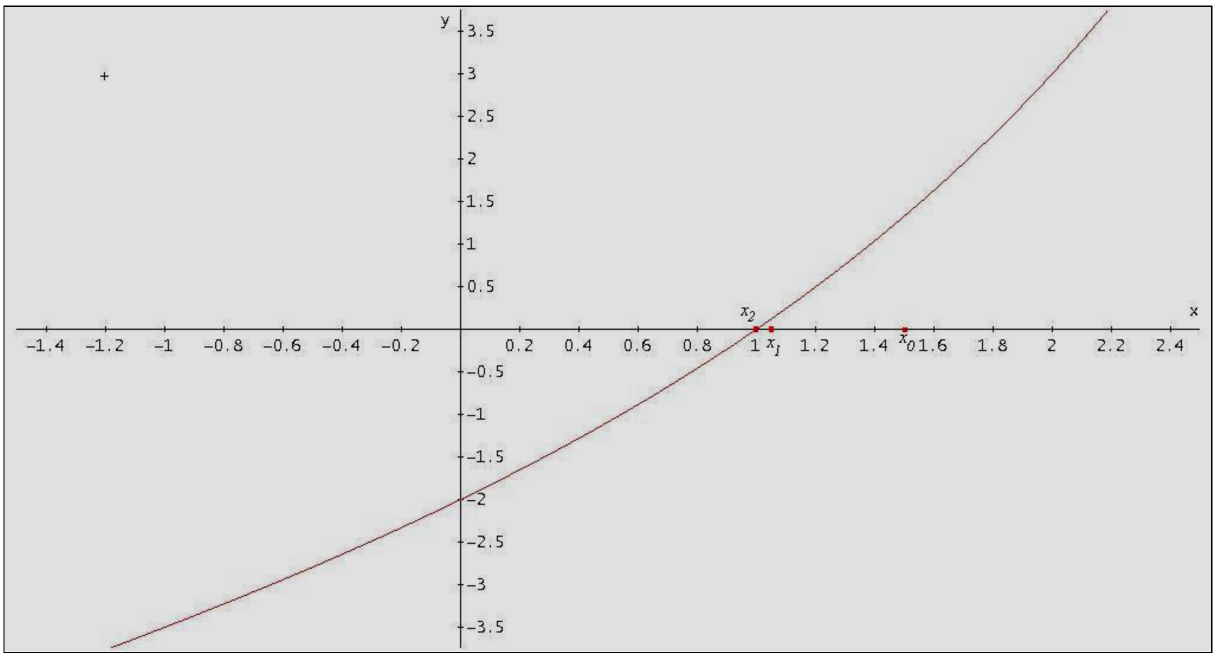
n	**X_n**	**$f(X_n)$**	**$f'(X_n)$**	**$\lvert X_n - X_{n-1}\rvert$**	**tolleranza**	**1,0E-05**
0	1,500000000	1,328427	2,960516307			
1	1,051285321	0,123661	2,436461138	0,448714679	NO	
2	1,000531111	0,001268	2,386804817	0,050754210	NO	
3	1,000000057	0,000000	2,386294430	0,000531054	NO	
4	**1,000000000**	0,000000	2,386294376	**0,000000057**	SI	

Come si vede subito, la soluzione individuata, con una tolleranza $t = 10^{-5}$, è ***c=1,00000,*** trovata dopo quattro iterazioni contro le dodici iterazioni necessarie per la convergenza del metodo di bisezione, a parità di tolleranza.

Questo esempio mostra come il metodo di Newton converga molto più rapidamente alla soluzione rispetto al metodo di bisezione.

Sottolineo il fatto che la maggior velocità di convergenza dell'algoritmo delle tangenti non è "gratuita": il prezzo da pagare è quello della maggior laboriosità dei calcoli poiché nella formula iterativa che la definisce è presente la derivata prima della funzione, calcolo non sempre agevole da eseguire.

Il seguente grafico mostra come la successione (decrescente) di punti x_k (puntini rossi sul grafico) generata dall'algoritmo si avvicini alla soluzione dell'equazione:



Appendice

Confrontiamo i tre algoritmi

In questo appendice verranno messi a confronto i risultati ottenuti dai tre algoritmo finora affrontati, allo scopo di mostrare agli studenti le diverse velocità di convergenza delle tre successioni, a parità di equazione, di punto di partenza e di tolleranza ammessa.

Vengono mostrate parallelamente le tabelle ottenute risolvendo alcune equazioni con l'uso del foglio di calcolo, in modo da poterne confrontare immediatamente i risultati. Sarà dunque evidente che il metodo di Newton, a parità di condizioni è, dei tre il più rapido a convergere, in termini di numero di iterate, verso la soluzione dell'equazione.

Si vuole inoltre mettere in evidenza come, il metodo delle corde è dei tre quello che, pur non convergendo alla massima velocità, rappresenta il migliore in termini di efficienza computazionale.

Le soluzioni individuate dai tre algoritmi vengono scritte in grassetto e, nella colonna *n* sono riportati i numeri delle iterazioni eseguite da ciascuno.

Esempio n.1

Equazione: $2^x + x - 3 = 0$

Metodo di bisezione

n	a_n	b_n	$(a_n+b_n)/2$	$f(a_n+b_n)/2$	$\lvert b_n-a_n\rvert$	toll
0	0,000000	3,000000	1,500000	1,328427	3,000000	NO
1	0,000000	1,500000	0,750000	-0,568207	1,500000	NO
2	0,750000	1,500000	1,125000	0,306015	0,750000	NO
3	0,750000	1,125000	0,937500	-0,147293	0,375000	NO
4	0,937500	1,125000	1,031250	0,075044	0,187500	NO
5	0,937500	1,031250	0,984375	-0,037169	0,093750	NO
6	0,984375	1,031250	1,007813	0,018672	0,046875	NO
7	0,984375	1,007813	0,996094	-0,009314	0,023438	NO
8	0,996094	1,007813	1,001953	0,004663	0,011719	NO
9	0,996094	1,001953	0,999023	-0,002330	0,005859	NO
10	0,999023	1,001953	1,000488	0,001165	0,002930	NO
11	0,999023	1,000488	0,999756	-0,000583	0,001465	NO
12	0,999756	1,000488	1,000122	0,000291	0,000732	NO
13	0,999756	1,000122	0,999939	-0,000146	0,000366	NO
14	0,999939	1,000122	1,000031	0,000073	0,000183	NO
15	0,999939	1,000031	0,999985	-0,000036	0,000092	NO
16	0,999985	1,000031	1,000008	0,000018	0,000046	NO
17	0,999985	1,000008	0,999996	-0,000009	0,000023	NO
18	0,999996	1,000008	1,000002	0,000005	0,000011	NO
19	0,999996	1,000002	**0,999999**	-0,000002	0,000006	SI

Metodo delle corde

n	Xn	f(Xn)	$\lvert X_n-X_{n-1}\rvert$	toll
0	0,000000	-2,000000		
1	1,500000	1,328427	1,500000	NO
2	0,901327	-0,230891	0,598673	NO
3	1,005381	0,012854	0,104054	NO
4	0,999588	-0,000983	0,005793	NO
5	1,000031	0,000074	0,000443	NO
6	0,999998	-0,000006	0,000033	NO
7	**1,000000**	0,000000	0,000003	SI

Metodo di Newton

n	Xn	f(Xn)	f'(Xn)	$\lvert X_n-X_{n-1}\rvert$	toll
0	1,500000	1,328427	2,960516		1,0E-05
1	1,051285	0,123661	2,436461	0,448715	NO
2	1,000531	0,001268	2,386805	0,050754	NO
3	1,000000	0,000000	2,386294	0,000531	NO
4	**1,000000**	0,000000	2,386294	0,000000	SI

Esempio n.2

Equazione: $x - \cos x = 0$

Metodo di bisezione

n	a_n	b_n	$(a_n+b_n)/2$	$f(a_n+b_n)/2$	$\|b_n-a_n\|$	toll
0	0,0000000	1,5000000	0,7500000	0,0183111	1,5000000	NO
1	0,0000000	0,7500000	0,3750000	-0,5555076	0,7500000	NO
2	0,3750000	0,7500000	0,5625000	-0,2834245	0,3750000	NO
3	0,5625000	0,7500000	0,6562500	-0,1360359	0,1875000	NO
4	0,6562500	0,7500000	0,7031250	-0,0597003	0,0937500	NO
5	0,7031250	0,7500000	0,7265625	-0,0208999	0,0468750	NO
6	0,7265625	0,7500000	0,7382813	-0,0013451	0,0234375	NO
7	0,7382813	0,7500000	0,7441406	0,0084704	0,0117188	NO
8	0,7382813	0,7441406	0,7412109	0,0035594	0,0058594	NO
9	0,7382813	0,7412109	0,7397461	0,0011064	0,0029297	NO
10	0,7382813	0,7397461	0,7390137	-0,0001196	0,0014648	NO
11	0,7390137	0,7397461	0,7393799	0,0004933	0,0007324	NO
12	0,7390137	0,7393799	0,7391968	0,0001869	0,0003662	NO
13	0,7390137	0,7391968	0,7391052	0,0000336	0,0001831	NO
14	0,7390137	0,7391052	0,7390594	-0,0000430	0,0000916	NO
15	0,7390594	0,7391052	0,7390823	-0,0000047	0,0000458	NO
16	0,7390823	0,7391052	0,7390938	0,0000145	0,0000229	NO
17	0,7390823	0,7390938	0,7390881	0,0000049	0,0000114	NO
18	0,7390823	0,7390881	0,7390852	0,0000001	0,0000057	NO
19	0,7390823	0,7390852	0,7390838	-0,0000023	0,0000029	NO
20	0,7390838	0,7390852	0,7390845	-0,0000011	0,0000014	NO
21	0,7390845	0,7390852	**0,7390848**	-0,0000005	0,0000007	SI

Metodo delle corde

n	Xn	f(Xn)	$\|X_n-X_{n-1}\|$	toll
0	0,0000000	-1,0000000		
1	1,5000000	1,4292628	1,5000000	NO
2	0,8558837	0,2003322	0,6441163	NO
3	0,7656013	0,0446355	0,0902824	NO
4	0,7454857	0,0107272	0,0201156	NO
5	0,7406514	0,0026222	0,0048344	NO
6	0,7394696	0,0006436	0,0011817	NO
7	0,7391796	0,0001581	0,0002900	NO
8	0,7391084	0,0000389	0,0000713	NO
9	0,7390908	0,0000095	0,0000175	NO
10	0,7390865	0,0000023	0,0000043	NO
11	0,7390855	0,0000006	0,0000011	NO
12	**0,7390852**	0,0000001	0,0000003	SI

Metodo di Newton

n	Xn	f(Xn)	f'(Xn)	$\|X_n-X_{n-1}\|$	toll
0	1,0000000	0,4596977	1,8414710		1,0E-06
1	0,7503639	0,0189231	1,6819050	0,2496361	NO
2	0,7391129	0,0000465	1,6736325	0,0112510	NO
3	0,7390851	0,0000000	1,6736120	0,0000278	NO
4	**0,7390851**	0,0000000	1,6736120	0,0000000	SI

Esempio n.3

Equazione: $x^3 - x + 1 = 0$

Metodo di bisezione						
n	**a_n**	**b_n**	**$(a_n+b_n)/2$**	**$f(a_n+b_n)/2$**	**$\lvert b_n-a_n \rvert$**	**toll**
0	-1,500000	1,000000	-0,250000	1,234375	2,500000	NO
1	-1,500000	-0,250000	-0,875000	1,205078	1,250000	NO
2	-1,500000	-0,875000	-1,187500	0,512939	0,625000	NO
3	-1,500000	-1,187500	-1,343750	-0,082611	0,312500	NO
4	-1,343750	-1,187500	-1,265625	0,238338	0,156250	NO
5	-1,343750	-1,265625	-1,304688	0,083836	0,078125	NO
6	-1,343750	-1,304688	-1,324219	0,002128	0,039063	NO
7	-1,343750	-1,324219	-1,333984	-0,039860	0,019531	NO
8	-1,333984	-1,324219	-1,329102	-0,018771	0,009766	NO
9	-1,329102	-1,324219	-1,326660	-0,008298	0,004883	NO
10	-1,326660	-1,324219	-1,325439	-0,003079	0,002441	NO
11	-1,325439	-1,324219	-1,324829	-0,000474	0,001221	NO
12	-1,324829	-1,324219	-1,324524	0,000827	0,000610	NO
13	-1,324829	-1,324524	-1,324677	0,000177	0,000305	NO
14	-1,324829	-1,324677	-1,324753	-0,000149	0,000153	NO
15	-1,324753	-1,324677	-1,324715	0,000014	0,000076	NO
16	-1,324753	-1,324715	-1,324734	-0,000067	0,000038	NO
17	-1,324734	-1,324715	-1,324724	-0,000027	0,000019	NO
18	-1,324724	-1,324715	**-1,324719**	-0,000006	0,000010	**SI**

Metodo delle corde				
n	**Xn**	**f(Xn)**	**$\lvert X_n-X_{n-1} \rvert$**	**toll**
0	0,000000	1,000000		
1	2,000000	7,000000	2,000000	NO
2	-0,333333	1,296296	2,333333	NO
3	-0,765432	1,316976	0,432099	NO
4	-1,204424	0,457242	0,438992	NO
5	-1,356838	-0,141113	0,152414	NO
6	-1,309800	0,062738	0,047038	NO
7	-1,330713	-0,025709	0,020913	NO
8	-1,322143	0,010954	0,008570	NO
9	-1,325795	-0,004596	0,003651	NO
10	-1,324263	0,001941	0,001532	NO
11	-1,324910	-0,000818	0,000647	NO
12	-1,324637	0,000345	0,000273	NO
13	-1,324752	-0,000145	0,000115	NO
14	-1,324704	0,000061	0,000048	NO
15	-1,324724	-0,000026	0,000020	NO
16	**-1,324715**	0,000011	0,000009	**SI**

Metodo di Newton				
n	**Xn**	**f(Xn)**	**|Xn-Xn-1|**	**toll**
0	-1,000000	1,000000	0,000000	1,0E-05
1	-1,500000	-0,875000	0,500000	NO
2	-1,347826	-0,100682	0,152174	NO
3	-1,325200	-0,002058	0,022626	NO
4	-1,324718	-0,000001	0,000482	NO
5	**-1,324718**	0,000000	0,000000	**SI**

Esempio n.4

Equazione: $senx + 1 = x^2$

Metodo di bisezione						
n	a_n	b_n	$(a_n+b_n)/2$	$f(a_n+b_n)/2$	$\|b_n-a_n\|$	toll
0	-2,000000	0,000000	-1,000000	-0,841471	2,000000	NO
1	-1,000000	0,000000	-0,500000	0,270574	1,000000	NO
2	-1,000000	-0,500000	-0,750000	-0,244139	0,500000	NO
3	-0,750000	-0,500000	-0,625000	0,024278	0,250000	NO
4	-0,750000	-0,625000	-0,687500	-0,107263	0,125000	NO
5	-0,687500	-0,625000	-0,656250	-0,040814	0,062500	NO
6	-0,656250	-0,625000	-0,640625	-0,008097	0,031250	NO
7	-0,640625	-0,625000	-0,632813	0,008133	0,015625	NO
8	-0,640625	-0,632813	-0,636719	0,000029	0,007813	NO
9	-0,640625	-0,636719	-0,638672	-0,004031	0,003906	NO
10	-0,638672	-0,636719	-0,637695	-0,002001	0,001953	NO
11	-0,637695	-0,636719	-0,637207	-0,000986	0,000977	NO
12	-0,637207	-0,636719	-0,636963	-0,000478	0,000488	NO
13	-0,636963	-0,636719	-0,636841	-0,000225	0,000244	NO
14	-0,636841	-0,636719	-0,636780	-0,000098	0,000122	NO
15	-0,636780	-0,636719	**-0,636749**	-0,000035	0,000061	SI

Metodo delle corde				
n	Xn	f(Xn)	$\|X_n-X_{n-1}\|$	toll
0	-2,000000	-3,909297		
1	0,000000	1,000000	2,000000	NO
2	-0,407390	0,437819	0,407390	NO
3	-0,567790	0,139845	0,160399	NO
4	-0,617254	0,040200	0,049464	NO
5	-0,631328	0,011208	0,014074	NO
6	-0,635241	0,003098	0,003913	NO
7	-0,636321	0,000854	0,001081	NO
8	-0,636619	0,000235	0,000298	NO
9	**-0,636701**	0,000065	0,000082	SI

Metodo di Newton				
n	Xn	f(Xn)	|Xn-Xn-1|	toll
0	-2,000000	-3,909297		1,0E-04
1	-0,909192	-0,615636	3,293661	NO
2	-0,656131	-0,040564	0,575072	NO
3	-0,636857	-0,000259	0,040305	NO
4	-0,636733	0,000000	0,000259	NO
5	**-0,636733**	0,000000	0,000000	SI

Bibliografia

[1] V. Comincioli “*ANALISI NUMERICA Metodi Modelli Applicazioni*” Ed. McGraw-Hill.

[2] “*Risoluzione grafica di una dis(equazione)*” di Anna Gobitti in “L’approssimazione nella didattica della matematica – I.R.R.E. Veneto. Ed. Ghisetti e Corvi.

[3] G.C. Barozzi “*Corso di analisi matematica*”, Ed.Zanichelli.

[4] G.Meini “*Informatica per la matematica*”, disponibile all’URL: http://www.giorgiomeini.it/algonum.PDF

Indice