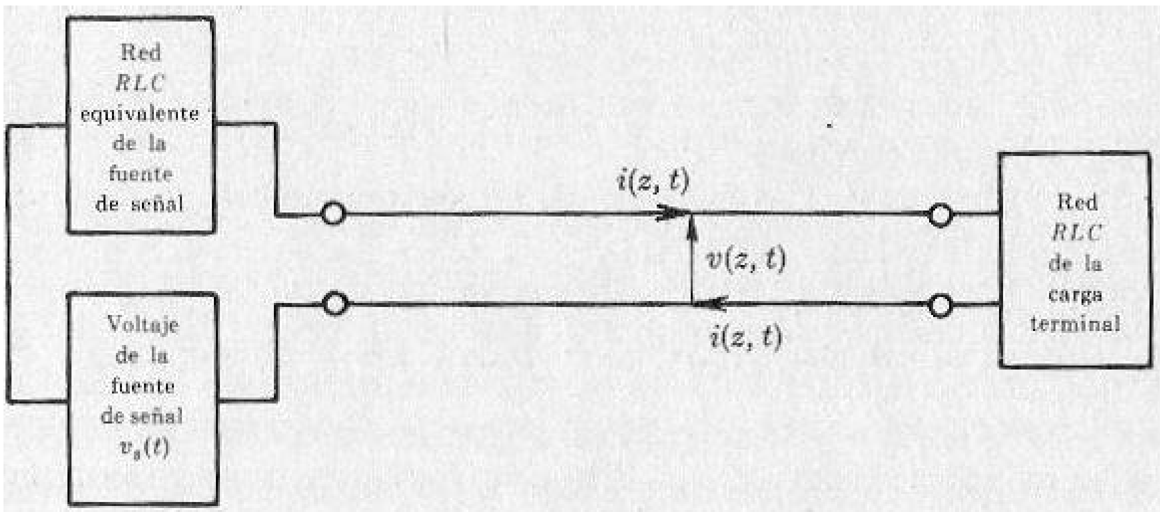
UNIVERSIDAD DISTRITAL FJDC
FACULTAD TECNOLÓGICA
ESPECIALIZACIÓN EN TELECOMUNICACIONES
Medios de Transmisión

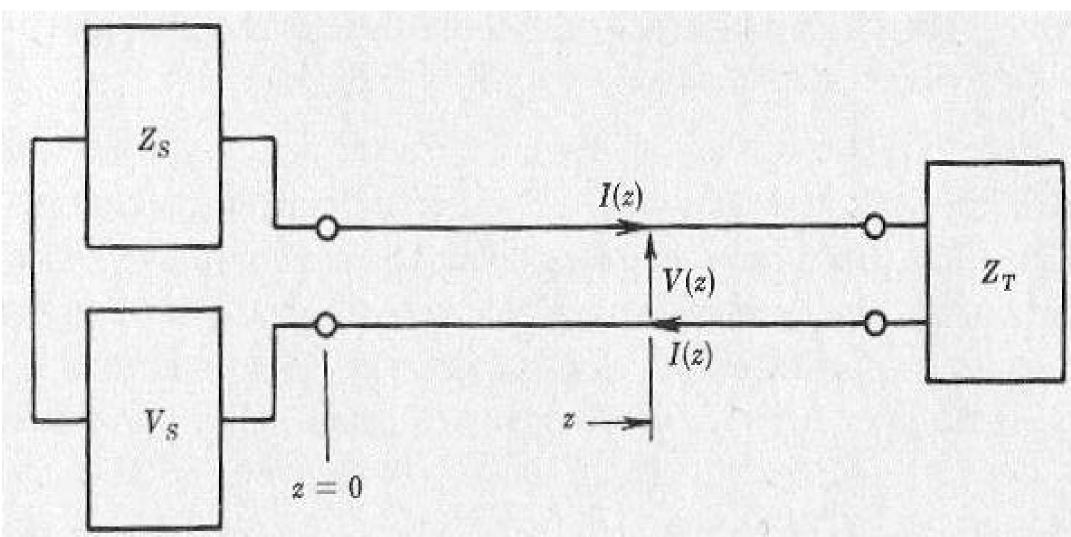
ECUACIONES DIFERENCIALES DE LA LÍNEA DE TRANSMISIÓN UNIFORME

Prof. Francisco J. Zamora N.

Las líneas de transmisión pueden analizarse desde el punto de vista de parámetros de circuito distribuído en el dominio del tiempo:



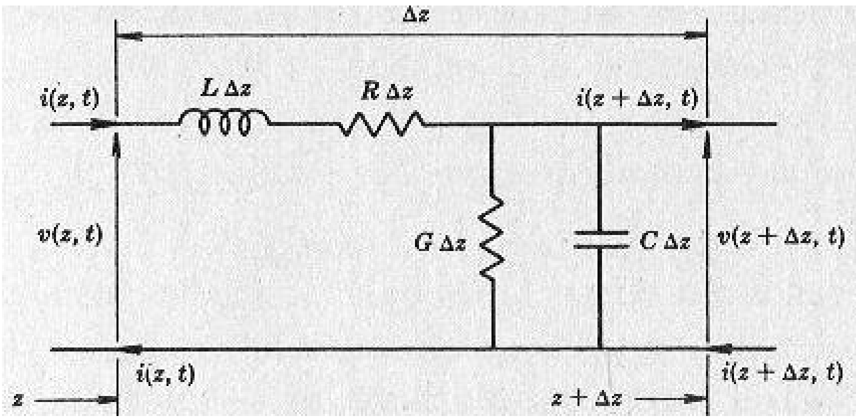
O en el dominio de la frecuencia:



Ver: Líneas de Transmisón, Chipman, Serie Schaum.

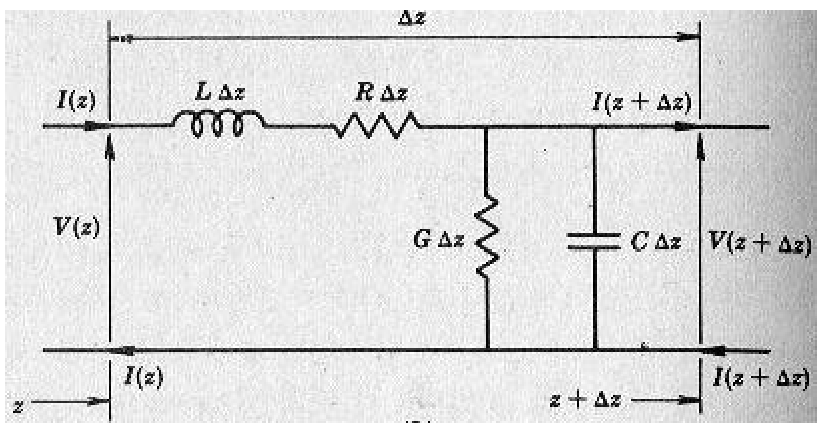
NOTA: todas las derivadas que involucran funciones de más de una variable, son derivadas parciales, sin embargo, el editor de texto empleado (mcad 7) no permite representarlas como tal!

Observaciones experimentales sobre las líneas de transmisión prácticas han permitido establecer que su comportamiento se puede modelar, si cumplen con los postulados fundamentales (Chipman) mediante:



En el dominio del tiempo.

...En el dominio de la frecuencia (modelo fasorial).



Empleando el límite cuando Δz tiende a cero, la definición de derivada parcial, ya que v e i son funciones de t y z (por convenciencia con las coordenadas cilíndricas), el eje de propagación de las variables eléctricas sobre la línea y las leyes de Kirchhoff (la corriente y voltaje en el punto z+Δz son iguales a aquellas en z, menos los retornos de corriente o caídas de tensión en el segmento Δz), se concluye que las ecuaciones diferenciales en el dominio del tiempo son:

$$\frac{d}{dz}v(z,t) = -R\cdot i(z,t) - L\cdot\frac{d}{dt}i(z,t)$$

$$\frac{d}{dz}i(z,t) = -G\cdot v(z,t) - C\cdot\frac{d}{dt}v(z,t)$$

Estas son ecuaciones diferenciales parciales simultáneas de primer orden con coeficientes constantes de las variables dependientes v e i y las variables independientes z y t

Las anteriores ecuaciones relacionan v e i con los parámetros distribuídos de circuito y sus respectivas variaciones del tiempo con las de la distancia (gradiente).

Para solucionar estas ecuaciones se elimina una de las dos variables, tomando la derivada parcial con respecto a z de todos los términos de la ecuación, cambiando el orden de diferenciación (t y z) y substituyendo el valor obtenido en la otra ecuación, para obtener:

$$\frac{d^2}{dz^2} v(z,t) = L \cdot C \cdot \left(\frac{d^2}{dt^2} v(z,t) \right) + \left[(L \cdot G + R \cdot C) \cdot \left(\frac{d}{dt} v(z,t) \right) + R \cdot G \cdot v(z,t) \right]$$

$$\frac{d^2}{dz^2} i(z,t) = L \cdot C \cdot \left(\frac{d^2}{dt^2} i(z,t) \right) + \left[(L \cdot G + R \cdot C) \cdot \left(\frac{d}{dt} i(z,t) \right) + R \cdot G \cdot i(z,t) \right]$$

Aunque la forma de las ecuaciones es idéntica, las funciones de i y v no siempre son iguales debido a que la solución para cada una de ellar requiere el establecimiento de las condiciones de frontera particulares de cada caso.

En general, la solución de estas ecuaciones no obedece los esquemas convencionales enontrados en los textos de matemáticas y solamente es posible encontrar soluciones sencillas si los parámetros R,L,G y C (que además se asumen independientes de v, i y t) cumplen ciertas condiciones, aproximadas a las situaciones reales, tales como:

$L = G = 0$ Como es el caso de un conductor telegráfico (ULF) submarino)--Lord Kelvin

$R = G = 0$ Describe LT sin pérdidas, válido para pequeños segmentos de líneas reales.

Ecuaciones en el dominio de la frecuencia:

Siguiendo procedimientos similares a los descritos, pero ahora considerando que I y V son magnitudes fasoriales que responden a una excitación armónica de frecuencia angular ω, se encuentra que:

$$\frac{d}{dz} V(z) = (-R + j \cdot \omega \cdot L) \cdot I \qquad \text{Y:} \qquad \frac{d}{dz} I(z) = (-G + j \cdot \omega \cdot C) \cdot V$$

... y también simplificando las expresiones se obtiene:

$$\frac{d^2}{dz^2} V - (R + j \cdot \omega \cdot L) \cdot (G + j \cdot \omega \cdot C) \cdot V = 0$$

$$\frac{d^2}{dz^2} I - (R + j \cdot \omega \cdot L) \cdot (G + j \cdot \omega \cdot C) \cdot I = 0$$

Ecuaciones separadas de segundo orden para V y para I.

Todas las líneas de transmisión que cumplan los postulados fundamentales, tienen relaciones de voltaje y corriente descritas por las soluciones de las anteriores ecuaciones diferenciales.

Repasando los postulados:

1. El sistema o línea uniforme consiste de dos conductores rectos y paralelos (curvaturas excesivas violan uniformidad)
2. Las corrientes en los conductores de la línea fluyen únicamente en la dirección de la longitud de la línea (no existen los modos de las guías de onda).
3. En la intersección de cualquier plano transversal con los conductores de una línea de transmisión, las corrientes instantáneas totales en los dos conductores son iguales en magnitud pero fluyen en direcciones opuestas.
4. En la intersección de cualquier plano transversal con los conductores de la línea hay un valor de diferencia de potencial único entre los conductores, en cualquier instante, que es igual a la integral de línea del campo eléctrico a lo largo de todas las trayectorias en el plano transversal, entre cualquier punto sobre la periferia de uno de los conductores y cualquier punto sobre la periferia del otro.
5. El comportamiento eléctrico de la línea se describe completamente por cuatro coeficientes del circuito eléctrico distribuído, cuyos valores por unidad de longitud de línea son constantes en cualquier parte de esta (dependen unicamente de los materiales, geometria y medio que rodea la línea).

EJERCICIOS

3.1 Los coeficientes de circuito distribuído de una línea de transmisión de un par de cables de calibre 19. Los parámetros de la línea son:

$$\omega := 10^4 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \qquad R := 0.053 \frac{\text{ohm}}{\text{m}} \qquad L := 0.62 \frac{\mu\text{H}}{\text{m}} \qquad G := 950 \cdot 10^{-12} \cdot \frac{\text{mho}}{\text{m}}$$

$$C := 39.5 \frac{\text{pF}}{\text{m}}$$

En la coordenada z sobre la línea la corriente instantánea está dada por:

$$il(t) := 75 \cdot \cos\left(10^4 \cdot t\right) \text{ mA}$$

a) Encuentre una expresión para el gradiente de voltaje a lo largo de la línea, en el punto z, en v/m.

El gradiente de voltaje está dado, según lo indicado arriba, en el dominio del tiempo, por:

Definiciones auxiliares: $T := 2 \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{\omega}$ $\qquad T = 6.283 \cdot 10^{-4} \cdot \text{s}$ $\qquad t := 0, \frac{T}{50} .. 2 \cdot T$

$i(t) := 75\ \text{mA}\cdot\cos\left(10^4\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}\cdot t\right)$ $Gv(t) := -R\cdot i(t) - L\cdot\frac{d}{dt}i(t)$

Es posible obtener en mcad unas aproximaciones simbolicas, a saber:

$$-R\cdot\left(75\ \text{mA}\cdot\cos\left(10^4\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}\cdot t\right)\right) - L\cdot\frac{d}{dt}75\ \text{mA}\cdot\cos\left(10^4\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}\cdot t\right)$$

$$-3.975\cdot\frac{\text{ohm}}{\text{m}}\cdot\text{mA}\cdot\cos\left(10000.\cdot\frac{\text{rad}}{\text{s}}\cdot t\right) + 465000.0\cdot\frac{\mu\text{H}}{\text{m}}\cdot\text{mA}\cdot\sin\left(10000.\cdot\frac{\text{rad}}{\text{s}}\cdot t\right)\cdot\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Recordando la identidad trigonométrica: $K\cdot\cos(a-b) := K\cdot\cos(a)\cdot\cos(b) + K\cdot\text{sen}(a)\cdot\text{sen}(b)$

se tratara de reducir la anterior expresión para el gradiente de voltaje en la línea, tal como requiere el ejercicio. Se tienen entonces dos ecuaciones con las siguientes condiciones:

Valores iniciales para la iteración: $K := 0.5$ $b := 0.0$

given

$K\cdot\cos(b) = -3.98\cdot 10^{-3}$ y $K\cdot\sin(b) = 0.46\cdot 10^{-3}$

Ahora se indica a mcad que halle las solucines para K y b, y las guarde con los nombres k y α

$\begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix} := \text{find}(K, b)$

$k = -4.006\cdot 10^{-3}$

$\alpha = -0.115$

Por lo tanto, la expresión para el gradiente del voltaje, simplificando manualmente las unidades expresadas por el mcad, será:

$$Gv(t) := -4.002\ \frac{\text{mV}}{\text{m}}\cdot\cos\left(10^4\cdot t + 0.115\right)$$

Que evidentemente puede ser convertido a una cantidad positiva si se desfasa (en atraso o adelanto) el ángulo en una cantidad igual a un semiperíodo, según: -cos(a)=cos(π+a):

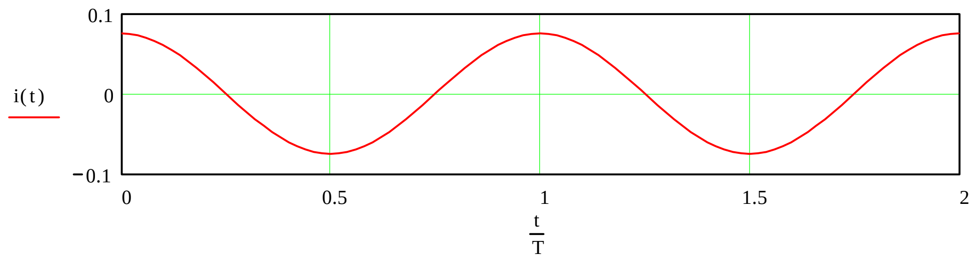
$\pi + \alpha = 3.027$ entonces, $Gv(t) := 4.002\ \frac{\text{mV}}{\text{m}}\cdot\cos\left[\left(10^4\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)\cdot t - 3.027\right]$

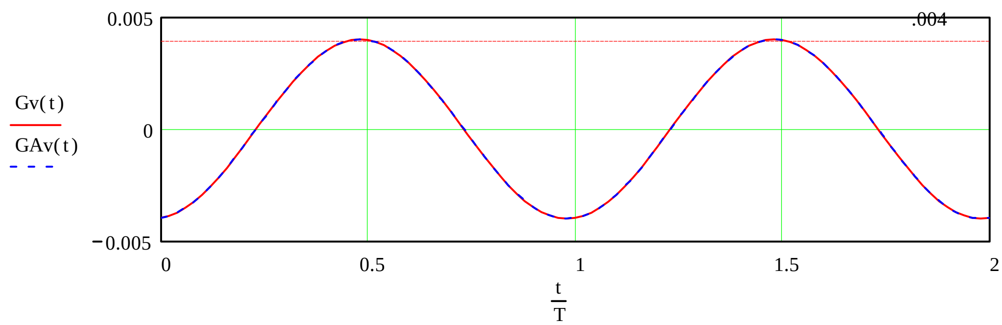
b) El máximo valor del gradiente es 4.0002 mV/m, y ocurre, para cada valor de z sobre la línea, cada:

$t0 := 0\ s$ given $\cos\left[\left(10^4\ \frac{rad}{s}\right)\cdot t0 - 3.027\ rad\right] = 1$ $\text{find}(t0) = 1.559 \cdot 10^{-3} \cdot s$

Observe que las asignaciones previas a la función "given" corresponden a valores arbitrarios iniciales para el proceso de iteración que requiere el mcad para "find" y no implican nada adicional.

$$GAv(t) := 4.002\ \frac{mV}{m}\cdot\cos\left[\left(10^4\ \frac{rad}{s}\right)\cdot t - 3.027\right]$$





En las anteriores gráficas se aprecia el ajuste de las expresiones calculada y analítica para el gradiente de tensión, ambas asistidas por MCAD, así como su relación de fase con i(t).

3.2 Para la línea de transmisión del problema 3.1, el fasor de voltaje en un punto sobre la línea tiene una magnitud rms de 16.5 V, a la frecuencia de la señal siendo 1100 Hz. Suponga que los valores de R,L,G y C son válidos a esta frecuencia, ligeramente diferente.
a) Encuentre una expresión para el gradiente del FASOR de corriente a lo largo de la línea en el mismo punto:

En el dominio de la frecuencia el gradiente está dado por: $j := \sqrt{-1}$

$f := 1100\ Hz$

$V := 16.5\ volt\cdot e^{j\cdot 0}$

$\omega := 2\cdot\pi\ rad\cdot f$

$GI := -((G + j\cdot\omega\cdot C)\cdot V)$ $GI = -1.568 \cdot 10^{-8} - 4.505 \cdot 10^{-6} j \quad \cdot m^{-1} \cdot A$

Adicionalmente se puede expresar el gradiene de corriente en forma polar:

$$|GI| = 4.505 \cdot 10^{-6} \cdot m^{-1} \cdot A \qquad arg(GI) \cdot \frac{180}{\pi} = -90.199$$

b) Cuál es la magnitud fasorial rms de la corriente transversal entre los dos conductores a lo largo de 10 cm de longitud de línea y cuál el ángulo de fase de esta corriente en relación con el voltaje de la línea en el punto?

Para hallar la corriente transversal se multiplica el negativo del gradiente por la longitud (suponiendo que dicho gradiente sea constante en todo segmento de línea):

$$\Delta L := 10\ cm \qquad \Delta I := -GI \cdot \Delta L \qquad \Delta I = 1.568 \cdot 10^{-9} + 4.505 \cdot 10^{-7} j \quad \cdot A \qquad arg(\Delta I) \cdot \frac{180}{\pi} = 89.801$$

El fasor de referencia de voltaje tiene ángulo 0, luego la corriente transversal se adelanta en 89.801 grados al voltaje de línea en ese punto y es casi una corriente capacitiva.

c) Cuál es el gradiente máximo de corriente instantánea a lo largo de la línea?

Puesto que las magnitudes de todas las cantidades fasoriales aquí usadas son valores rms, el gradiente máximo a lo largo de la línea es simplemente:

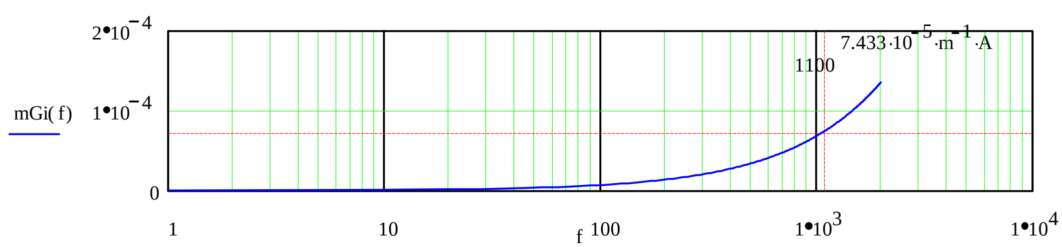
$$\left|\sqrt{2} \cdot GI\right| = 6.37 \cdot 10^{-6} \cdot m^{-1} \cdot A$$

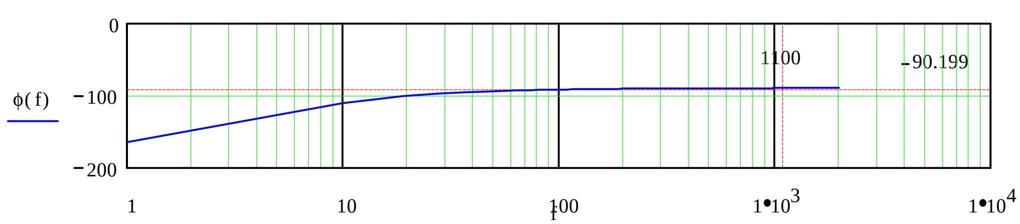
Para apreciar como se comporta el gradiente de corriente en función de la frecuencia, se definen los siguientes parámetros:

$$f := 1\ Hz, 10\ Hz .. 2000\ Hz \qquad V := (16.5\ V) \cdot e^{j \cdot 0} \qquad GI(f) := -((G + j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot C) \cdot V)$$

$$mGi(f) := |GI(f)| \qquad \phi(f) := \frac{180}{\pi} \cdot arg(GI(f)) \qquad mGi(1100\ Hz) = 7.433 \cdot 10^{-5} \cdot m^{-1} \cdot A$$

$$\phi(1100\ Hz) = -90.199$$





De las anteriores gráficas se puede concluir que la variación (disminución) de corriente por unidad de longitud crece rápidamente con la frecuencia. Asi mismo el ángulo de fase cambia de -180 a -90 grados. Esto indica que a medida que aumenta la frecuencia la línea de transmisión toma efectos capacitivos que retornan en mayor cuantía la corriente que ingresa en el punto de entrada.

OTROS PROBLEMAS PROPUESTOS:

3.9 Para todas las líneas de transmisión ordinarias usadas a frecuencias hasta de cientos de MHz, la razón R/L es mucho más grande que la razón G/C. Sin embargo, para líneas con aislantes dieléctricos sólidos usados a frecuencias de microondas, la relación para la línea indistorsionada de Heaviside se puede obtener con los coeficientes de circuito distribuído teniendo valores de:

$$R := 0.15\,\frac{\Omega}{m} \qquad L := 0.375\,\frac{\mu H}{m} \qquad G := 30\cdot 10^{-6}\cdot\frac{S}{m} \qquad C := 75\,\frac{pF}{m}$$

Si el patrón de tiempo del voltaje de entrada a la línea es $v(t) := v1\cdot f1(t)$

determine, a) el patrón de tiempo del voltaje en un punto situado 800 metros a lo largo de la línea desde el terminal de entrada, y b) el patrón de tiempo de la corriente en los terminales de entrada de la línea. Se supone que las señales avanzan alejándose de los terminales de entrada.

SOLUCIÓN:

Si la línea es uniforme, el patrón (forma de onda) en el tiempo no ofrece distorsión (modificación espectral) del mismo. Por lo tanto, el patrón de tiempo del voltaje es el mismo a cualquier distancia de la línea, pero obviamente la magnitud y fase de la señal aplicada a la entrada se ven afectadas. Ahora se define el tramo de distancia:

Tramo de línea: $\Delta l := 800\ m$

Y recordando que en un problema anterior (propuesto) se verificó que una posible solución para la ecuación diferencial en el caso de la línea indistorsionada de Heaviside es:

$$i(z,t) := e^{-R\cdot\sqrt{\frac{C}{L}}\cdot z}\cdot i1\cdot f1\left(t-\sqrt{L\cdot C}\cdot z\right) + e^{R\cdot\sqrt{\frac{C}{L}}\cdot z}\cdot i1\cdot f2\left(t+\sqrt{L\cdot C}\cdot z\right)$$

$$v(z,t) := e^{-R\cdot\sqrt{\frac{C}{L}}\cdot z}\cdot v1\cdot f1\left(t-\sqrt{L\cdot C}\cdot z\right) + e^{R\cdot\sqrt{\frac{C}{L}}\cdot z}\cdot v1\cdot f2\left(t+\sqrt{L\cdot C}\cdot z\right)$$

Analizando las ecuaciónes diferenciales para corriente y tensión respectivamente.

Por lo tanto el factor de amplitud se verá disminuído a: $e^{-\left(R\cdot\sqrt{\frac{C}{L}}\cdot\Delta l\right)} = 0.183$

o reducido en: $1 - e^{-\left(R\cdot\sqrt{\frac{C}{L}}\cdot\Delta l\right)} = 0.817$ siendo $R\cdot\sqrt{\frac{C}{L}}\cdot\Delta l = 1.697$

y el de desfase, o retardo, será de: $\sqrt{L\cdot C}\cdot\Delta l = 4.243\bullet 10^{-6}\ \bullet s$

El patrón de tiempo para la corriente en la entrada es igual en forma la patrón de tiempo del voltaje, pero en proporción diferente, según es posible demostrar para las líneas de transmisión indistorsionada de Heaviside y las de baja pérdida (excepto las de bajas frecuencias):

$$\frac{v(z,t)}{i(z,t)} = \sqrt{\frac{L}{C}} \qquad \sqrt{\frac{L}{C}} = 70.711\ \bullet ohm$$

Por lo tanto, para hallar el patrón de corriente se multiplica el patrón de voltaje por un factor de escala de:

$$\left[\left(\sqrt{\frac{L}{C}}\right)^{-1}\right] = 0.014\ \bullet siemens$$ o amperios/voltio

Recuérdese que un patrón de tiempo de voltaje o corriente simplemente consiste en la expresión como función del tiempo únicamente, suponiendo z constante. En ocasiones conviene asumir z = 0.

A continuación se comparan los resultados de la línea de Heaviside con el ejemplo anterior:

El estudiante debe concluir... $V := (16.5\ V)\cdot e^{j\cdot 0}$ $GIh(f) := -((G + j\cdot 2\cdot\pi\cdot f\cdot C)\cdot V)$

$mGih(f) := |GIh(f)|$ $\phi h(f) := \frac{180}{\pi}\cdot arg(GIh(f))$ $mGih(1100\ Hz) = 0.135\bullet m^{-1}\bullet A$

$\phi h(1100\ Hz) = -179.01$