TECNICO DELLA PIANIFICAZIONE ECONOMICA E AMBIENTALE DELLE AREE PORTUALI

LEZIONE 4/11/05

STATISTICA

Antigone Marino

antigone@na.infn.it

TEORIA ELEMENTARE DELLA PROBABILITA'

PROBABILITA'

La probabilità di un dato evento è il rapporto tra il numero dei casi favorevoli al suo verificarsi ed il numero dei casi possibili, purché essi siano tutti egualmente possibili.

DEFINIZIONE CLASSICA DI PROBABILITA'

Dato un evento *E*, siano *h* ed *n* rispettivamente i casi favorevoli e quelli possibili, allora la probabilità che si manifesti l'evento E (detta **successo**) è indicata con:

$$p = \Pr\{E\} = \frac{h}{n}$$

La probabilità che non si manifesti (**insuccesso**) è

$$q = \Pr\{nonE\} = \frac{n-h}{n} = 1 - \frac{h}{n} = 1 - p = 1 - \Pr\{E\}$$

Così $p+q=1$, ovvero

$$\Pr\{E\} + \Pr\{nonE\} = 1$$

ESEMPIO: lancio di dadi

Sia E l'evento che si presentino in un solo lancio di un dado i numeri 3 o 4. Ci sono sei modi in cui il dado può cadere: si possono infatti presentare i numeri 1, 2, 3, 4, 5 o 6. Se il dado è buono (cioè non truccato) possiamo assumere che questi sei modi siano equiprobabili.

Poiché E può presentarsi in due di questi modi abbiamo che la probabilità di ottenere un 3 o un 4 è

$$p = \Pr\{E\} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

La probabilità di non ottenere un 3 o un 4 è

$$q = \Pr\{\tilde{E}\} == 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

DEFINIZIONE DI PROBABILITA'
PER MEZZO DELLA FREQUENZA RELATIVA

La precedente definizione di probabilità ha lo svantaggio che "ugualmente possibile" è un'espressione vaga.

Esiste una definizione statistica di probabilità:

> La probabilità stimata o **probabilità empirica** di un evento è data dalla frequenza relativa del presentarsi dell'evento quando il numero delle osservazioni è molto grande. La probabilità è il limite della frequenza relativa quando il numero delle osservazioni cresce indefinitamente.

La definizione statistica, benché utile nella pratica, pone tuttavia delle difficoltà dal punto di vista matematico, dato che nella realtà non può esistere un numero che possa essere assunto come limite.

ESEMPIO: lanci di una moneta

Se, in 1000 lanci di una moneta, viene testa 529 volte, la frequenza relativa delle teste è 529/1000=0,529.

Se in altri 1000 lanci viene testa 493 volte, la frequenza relativa nel totale dei 2000 lanci è (529+493)/2000=0,511.

Secondo la definizione statistica continuando in questo modo dovremmo alla fine avvicinarci sempre di più al numero che noi diciamo "*probabilità che in un solo lancio della moneta venga testa*".

Ovviamente tale probabilità dovrebbe essere o,5.

PROBABILITA' CONDIZIONATA. EVENTI INDIPENDENTI E DIPENDENTI

Se E_1 ed E_2 sono due eventi, la probabilità che presentandosi E_1 si presenti anche E_2 è indicata con

$$\Pr\left\{E_2 \mid E_1\right\}$$

e viene detta **probabilità condizionata** di E_2, posto che E_1 si sia presentato. E_1 ed E_2 si dicono essere eventi dipendenti.

Se il presentarsi o il non-presentarsi di E_1 non influisce sulla probabilità di presentarsi di E_2, allora diciamo che E_1 ed E_2 sono due **eventi indipendenti**.

L'EVENTO COMPOSTO

Se denotiamo con E_1E_2 l'evento che si presentino dia E_1 che E_2, detto **evento composto**, allora

$$\Pr\{E_1E_2\} = \Pr\{E_1\}\Pr\{E_2 \mid E_1\}$$

In particolare se gli eventi sono indipendenti

$$\Pr\{E_1E_2\} = \Pr\{E_1\}\Pr\{E_2\}$$

Per tre eventi

$$\Pr\{E_1E_2E_3\} = \Pr\{E_1\}\Pr\{E_2 \mid E_1\}\Pr\{E_3 \mid E_1E_2\}$$

ESEMPIO: Eventi Dipendenti

In una scatola ci sono 3 palline bianche e 2 nere.

Sia E_1 l'evento "la prima pallina estratta è nera" ed E_2 l'evento "la seconda pallina estratta è nera". Le palline non vengono reintrodotte nella scatola dopo essere estratte, quindi i due eventi sono dipendenti.

$$\Pr\{E_1\} = \frac{2}{3+2} = \frac{2}{5}$$

è la probabilità che la prima pallina estratta sia nera, mentre

$$\Pr\{E_2 \mid E_1\} = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{4}$$

è la probabilità che la seconda sia estratta nera. Allora la probabilità che entrambe le palline estratte siano nere è

$$\Pr\{E_1 E_2\} = \Pr\{E_1\}\Pr\{E_2 \mid E_1\} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10} = 10\%$$

ESEMPIO per L'EVENTO COMPOSTO

ESEMPIO 1: Siano E_1 ed E_2 gli eventi "testa al quinto lancio" e "testa al sesto lancio" di una moneta. Allora E_1 ed E_2 sono eventi indipendenti, così ché la probabilità di avere testa sia al quanti che al sesto lancio è

$$\Pr\{E_1 E_2\} = \Pr\{E_1\}\Pr\{E_2\} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 25\%$$

ESEMPIO 2: Se la probabilità che A sia vivo tra 20 anni è 0.7 e la probabilità che B sia vivo tra 20 anni è 0.5, allora la probabilità che sia A che B siano vivi tra 20 anni è (0.7)(0.5)=0.35=35%

EVENTI ESCLUDENTISI A VICENDA

Si dice che due o più eventi si **escludono a vicenda** se il presentarsi di uno di essi esclude il presentasi degli altri. Così, se E_1 ed E_2 sono eventi escludentisi a vicenda,

$$\Pr\{E_1 E_2\} = 0$$

Se E_1+E_2 indica l'evento che dei due eventi E_1 ed E_2 "si presentino o l'uno o l'altro o entrambi", allora

$$\Pr\{E_1 + E_2\} = \Pr\{E_1\} + \Pr\{E_2\} - \Pr\{E_1 E_2\}$$

Nel caso particolare di eventi escludentisi a vicenda

$$\Pr\{E_1 + E_2\} = \Pr\{E_1\} + \Pr\{E_2\}$$

ESEMPIO DELLE CARTE (1)

Se E_1 è l'evento "estrazione di un asso da un mazzo di carte" ed E_2 è l'evento "estrazione di un re", allora

$$\Pr\{E_1\} = \frac{4}{42} = \frac{1}{13} \qquad \Pr\{E_2\} = \frac{4}{42} = \frac{1}{13}$$

La probabilità di estrarre o un asso o un re in una sola estrazione è

$$\Pr\{E_1 + E_2\} = \Pr\{E_1\} + \Pr\{E_2\} = \frac{1}{13} + \frac{1}{13} = \frac{2}{13}$$

Dato che l'asso ed il re non possono essere estratti insieme in una sola estrazione, cioè sono eventi escludentisi a vicenda.

ESEMPIO DELLE CARTE (2)

Se E_1 è l'evento "estrazione di un asso da un mazzo di carte" ed E_2 è l'evento "estrazione di una carta di cuori", allora E1 ed E2 non si escludono a vicenda dato che può essere estratto l' asso di cuori.

Allora la probabilità di estrarre o un asso o una carta di cuori o l'asso di cuori è

$$\Pr\{E_1 + E_2\} = \Pr\{E_1\} + \Pr\{E_2\} - \Pr\{E_1 E_2\}$$

Cioè

$$\Pr\{E_1 + E_2\} = \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$$

DISTRIBUZIONI DI PROBABILITA' DISCRETE

Se una variabile X può assumere un insieme discreto di valori $X_1, X_2, \ldots, X_k$ rispettivamente con probabilità p_1, p_2, …, p_k dove $p_1 + p_2 + \ldots + p_k = 1$, diciamo che è stata definita per X una distribuzione di probabilità discreta.

La funzione p(X) che assume i valori p_1, p_2, …, p_k è della funzione di probabilità.

ESEMPIO: Lanciamo un paio di dadi e denotiamo con X la somma di punti ottenuta. Allora la distribuzione di probabilità è data dalla seguente tabella

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(X)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Che rappresenta la probabilità di ottenere i diversi numeri

n FATTORIALE

n fattoriale, indicato con n! è definito come

$$n! = n(n-1)(n-2)\ldots 1$$

Quindi

5! = 5 · 4 · 3 · 2 · 1 = 120

0!=1 per convenzione

PERMUTAZIONI

Le permutazioni di n elementi diversi presi r alla volta sono i gruppi di *r* elementi che si possono formare con gli *n* elementi di partenza in modo che ciascun gruppo sia diverso dagli altri o per un elemento o per l'ordine.

Il numero di permutazioni di **n** oggetti presi **r** alla volta è denotato con $_{n}P_{r}$, P(n,r) oppure $P_{n,r}$ ed è dato da

$$_{n}P_{r} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

In particolare, il numero di permutazioni di n oggetti presi n alla volta è

$$_{n}P_{n} = n(n-1)(n-2)\ldots 1 = n!$$

ESEMPIO PERMUTAZIONI

ESEMPIO 1: Il numero delle permutazioni delle lettere a, b, c prese due alla volta è ${}_3P_2 = 3 \cdot 2 = 6$.

Tali permutazioni sono *ab, ba, ac, ca, bc, cb*.

ESEMPIO 2: Il numero delle permutazioni delle lettere della parola "statistica" è

$$\frac{10!}{2!3!2!2!1!} = 75600$$

dal momento che ***s*** si presenta 2 volte, **t** 3 volte, **a** 2 volte, **i** 2 volte e **c** 1 volta.

COMBINAZIONI

Le combinazioni di *n* elementi diversi presi *r* alla volta sono i gruppi di *r* elementi che si possono formare con gli *n* elementi di partenza in modo che ciascun gruppo sia diverso dagli altri almeno per un elemento.

Il numero di combinazioni di **n** oggetti presi **r** alla volta è denotato con $_n C_r$, C(n,r) oppure $C_{n,r}$ ed è dato da

$$_n C_r = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{_n P_r}{r!}$$

ESEMPIO COMBINAZIONI

ESEMPIO 1: Il numero delle combinazioni che si possono ottenere con le lettere a, b, c prese due alla volta è

$$ {}_3C_2 = \frac{3 \cdot 2}{2!} = 3 $$

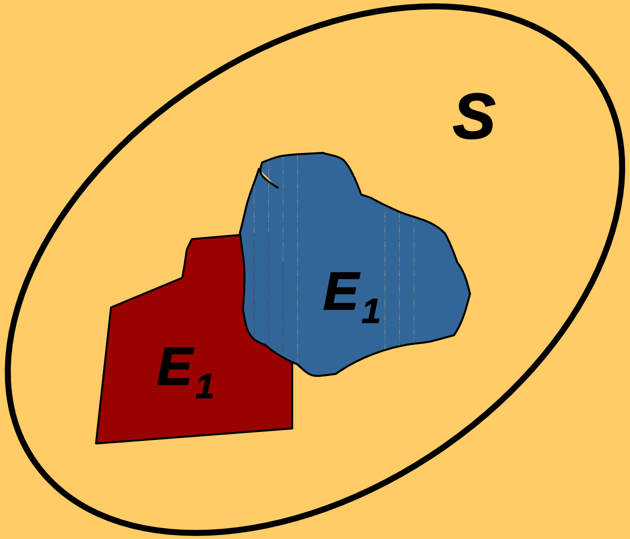
Tali combinazioni sono *ab, ac, bc*.

PROBABILITA' E TEORIA DEGLI INSIEMI

Nella moderna teoria della probabilità si definisce il cosiddetto spazio degli eventi S.

Se S contiene solo un numero finito di punti (ovvero eventi) allora a ciascun punto possiamo associare un numero non-negativo, detto probabilità.

DIAGRAMMA DI EULERO



L'evento E_1+E_2 è l'insieme dei punti che appartengono o ad uno dei due insieme o ad entrambi, ed è quindi indicato con

$$E_1 + E_2 = E_1 \cup E_2$$

L'evento E_1E_2 è l'insieme dei punti che appartengono ad entrambi, ed è quindi

$$E_1 + E_2 = E_1 \cap E_2$$