TECNICO DELLA PIANIFICAZIONE ECONOMICA E AMBIENTALE DELLE AREE PORTUALI

LEZIONE 31/10/05

STATISTICA

Antigone Marino

antigone@na.infn.it

TEORIA ELEMENTARE DELLA PROBABILITA'

PROBABILITA'

La probabilità di un dato evento è il rapporto tra il numero dei casi favorevoli al suo verificarsi ed il numero dei casi possibili, purché essi siano tutti egualmente possibili.

DEFINIZIONE CLASSICA DI PROBABILITA'

Dato un evento *E*, siano *h* ed *n* rispettivamente i casi favorevoli e quelli possibili, allora la probabilità che si manifesti l'evento E (detta **successo**) è indicata con:

$$p = \Pr\{E\} = \frac{h}{n}$$

La probabilità che non si manifesti (**insuccesso**) è

$$q = \Pr\{nonE\} = \frac{n-h}{n} = 1 - \frac{h}{n} = 1 - p = 1 - \Pr\{E\}$$

Così $p+q=1$, ovvero

$$\Pr\{E\} + \Pr\{nonE\} = 1$$

ESEMPIO: lancio di dadi

Sia E l'evento che si presentino in un solo lancio di un dado i numeri 3 o 4. Ci sono sei modi in cui il dado può cadere: si possono infatti presentare i numeri 1, 2, 3, 4, 5 o 6. Se il dado è buono (cioè non truccato) possiamo assumere che questi sei modi siano equiprobabili.

Poiché E può presentarsi in due di questi modi abbiamo che la porbabilità di ottenere un 3 o un 4 è

$$p = \Pr\{E\} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

La probabilità di non ottenere un 3 o un 4 è

$$q = \Pr\{\tilde{E}\} == 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

DEFINIZIONE DI PROBABILITA'
PER MEZZO DELLA FREQUENZA RELATIVA

La precendente definizione di probabilità ha lo svantaggio che "ugualmente possibile" è un'esapressione vaga.

Esiste una definizione statistica di probabilità:

> La probabilità stimata o **probabilità empirica** di un evento è data dalla frequenza relativa del presentarsi dell'evento quando il numero delle osservazioni è molto grande. La probabilità è il limite della frequenza relativa quando il numero delle osservazioni cresce indefinitamente.

La definizione statistica, benchè utile nella pratica, pone tuttavia delle difficoltà dal punto di vista matematico, dato che nella realtà non può esistere un numero che possa essere assunto come limite.

ESEMPIO: lanci di una moneta

Se, in 1000 lanci di una moneta, viene testa 529 volte, la frequenza relativa delle teste è 529/1000=0,529.

Se in altri 1000 lanci viene testa 493 volte, la frequenza relativa nel totale dei 2000 lanci è (529+493)/2000=0,511.

Secondo la definizione statistica continuando in questo modo dovremmo alla fine avvicinarci sempre di più al numero che noi diciamo "*probabilità che in un solo lancio della moneta venga testa*".

Ovviamente tale probabilità dovrebbe essere o,5.

PROBABILITA' CONDIZIONATA. EVENTI INDIPENDENTI E DIPENDENTI

Se E_1 ed E_2 sono due eventi, la probabilità che presentandosi E_1 si presenti anche E_2 è indicata con

$$\Pr\left\{E_2 \mid E_1\right\}$$

e viene detta **probabilità condizionata** di E_2, posto che E_1 si sia presentato. E_1 ed E_2 si dicono essere eventi dipendenti.

Se il presentarsi o il non-presentarsi di E_1 non influisce sulla probabilità di presentarsi di E_2, allora diciamo che E_1 ed E_2 sono due eventi indipendenti.

L'EVENTO COMPOSTO

Se denotiamo con E_1E_2 l'evento che si presentino dia E_1 che E_2, detto evento composto, allora

$$\Pr\{E_1E_2\} = \Pr\{E_1\}\Pr\{E_2 \mid E_1\}$$

In particolare se gli eventi sono indipendenti

$$\Pr\{E_1E_2\} = \Pr\{E_1\}\Pr\{E_2\}$$

Per tre eventi

$$\Pr\{E_1E_2E_3\} = \Pr\{E_1\}\Pr\{E_2 \mid E_1\}\Pr\{E_3 \mid E_1E_2\}$$

ESEMPIO per L'EVENTO COMPOSTO

ESEMPIO 1: Siano E_1 ed E_2 gli eventi "testa al quinto lancio" e "testa al sesto lancio" di una moneta. Allora E_1 ed E_2 sono eventi indipendenti, così ché la probabilità di avere testa sia al quanti che al sesto lancio è

$$\Pr\{E_1 E_2\} = \Pr\{E_1\}\Pr\{E_2\} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 25\%$$

ESEMPIO 2: Se la probabilità che A sia vivo tra 20 anni è 0.7 e la probabilità che B sia vivo tra 20 anni è 0.5, allora la probabilità che sia A che B siano vivi tra 20 anni è (0.7)(0.5)=0.35=35%

EVENTI ESCLUDENTISI A VICENDA

Si dice che due o più eventi si **escludono a vicenda** se il presentarsi di uno di essi esclude il presentasi degli altri. Così, se E_1 ed E_2 sono eventi escludentisi a vicenda,

$$\Pr\left\{E_1 E_2\right\} = 0$$

Se E_1+E_2 indica l'evento che dei due eventi E_1 ed E_2 "si presentino o l'uno o l'altro o entrambi", allora

$$\Pr\left\{E_1 + E_2\right\} = \Pr\left\{E_1\right\} + \Pr\left\{E_2\right\} - \Pr\left\{E_1 E_2\right\}$$

Nel caso particolare di eventi escludentisi a vicenda

$$\Pr\left\{E_1 + E_2\right\} = \Pr\left\{E_1\right\} + \Pr\left\{E_2\right\}$$

ESEMPIO DELLE CARTE (1)

Se E_1 è l'evento "estrazione di un asso da un mazzo di carte" ed E_2 è l'evento "estrazione di un re", allora

$$\Pr\left\{E_1\right\} = \frac{4}{42} = \frac{1}{13} \qquad \Pr\left\{E_2\right\} = \frac{4}{42} = \frac{1}{13}$$

La probabilità di estrarre o un asso o un re in una sola estrazione è

$$\Pr\left\{E_1 + E_2\right\} = \Pr\left\{E_1\right\} + \Pr\left\{E_2\right\} = \frac{1}{13} + \frac{1}{13} = \frac{2}{13}$$

Dato che l'asso ed il re non possono essere estratti insieme in una sola estrazione, cioè sono eventi escludentisi a vicenda.

ESEMPIO DELLE CARTE (2)

Se E_1 è l'evento "estrazione di un asso da un mazzo di carte" ed E_2 è l'evento "estrazione di una carta di cuori", allora E1 ed E2 non si escludono a vicenda dato che può essere estratto l' asso di cuori.

Allora la probabilità di estrarre o un asso o una carta di cuori o l'asso di cuori è

$$\Pr\{E_1 + E_2\} = \Pr\{E_1\} + \Pr\{E_2\} - \Pr\{E_1 E_2\}$$

Cioè

$$\Pr\{E_1 + E_2\} = \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$$